

تحليل رياضي (3)

السنة : الثانية

القسم: العلوم الأساسية

الاختصاص: هندسة حواسيب

المؤلفون : د.محمد نور شمه   د. عازار الشايب   د. شكري أبو عرابي


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University



منشورات جامعة دمشق

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

تحليل رياضي

(3)

الدكتور

عازار الشايب

أستاذ في قسم العلوم الأساسية

الدكتور

محمد نور شمه

أستاذ في قسم العلوم الأساسية

الدكتور

شكري أبو عرابي

مدرس في قسم العلوم الأساسية

جامعة

دمشق


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة:

توافقاً مع الخطة الدراسية الجديدة لكلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية في جامعة دمشق كلفنا بإعداد كتاب التحليل الرياضي/ 3 / في السنة الثانية لاختصاص قسم الحواسيب. وجدنا أن مفردات هذا المقرر واسعة ،ولهذا توخينا عدم الإسهاب في الشرح النظري قدر الإمكان والإكثار من التطبيقات التي تساعد طالب العلوم الهندسية (الحواسيب) بتفهم الأبحاث النظرية واستخدامها من أجل تطبيقات علمية خاصة لدراسته بفرعيها، الميكانيكي والكهربائي و ما يتفرع عنهما من فروع خاصة.

يتألف كتاب التحليل الرياضي / 3 / من ثلاثة أبواب كمايلي :

في *الباب الأول* بحثنا قضايا التحليل المركب، و نظرية الدوال التحليلية والتكاملات المركبة ونظرية الرواسب والتطبيقات المحافظة .

أما *الباب الثاني* فقد خصص لنشر وتكامل فوريه و الدوال الخاصة كما بحثنا في الفصل السابع منه موضوع الدوال الخاصة، فدرسنا بعض هذه الدول بالتفصيل والبعض الآخر بإيجاز ، و درسنا تحويلات لابلاس بكاملها وتحويل Z وتطبيقات هذه التحويلات.

أما الباب الثالث فقد خصص لدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية و نعني بها المعادلات الفيزيائية الرياضية ودرسنا أنماطاً ثلاثة لهذه المعادلات الزائدية والمكافئة والناقصية ، ثم وضحنا الطرق الخاصة بحل هذه المعادلات ووضعنا بعض التطبيقات.

نرجو أن نكون قد وفقنا في عملنا هذا وتلافينا أخطاء في المؤلفات السابقة كما نرجو من القراء موافاتنا بملاحظاتهم للاستفادة منها في الطبعة القادمة . والله من وراء القصد .

المؤلفون

25/ 2013/6

الباب الأول

التحليل المركب

Complex Analysis

الفصل الأول: المتحول المركب والدالة المركبة

الفصل الثاني: التكامل المركب (التكاملات الخطية)

الفصل الثالث: السلاسل المركبة وسلاسل تايلور ولورانت

الفصل الرابع: نظرية الرواسب وتطبيقاته

الفصل الخامس : التطبيقات المطابقة (المحافظة)


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

المتحول المركب والدالة المركبة

Complex Numbers and the Complex Functions

إن أول من قدم الأعداد المركبة العالم *غيرو لامو كاردانو* (Girolamo Cardano) عام 1545م في مقالة بعنوان Ans Magna حيث أعطى قيمة للأعداد السالبة وأبرز خواصها ، ثم جاء العالم الرياضي *كارل فريد* ريشت (Carl Fridrich) فأعطى الاسم الحالي للأعداد المركبة و استخدمها في إثبات النظرية الأساسية في الجبر (يوجد لكل كثيرة حدود غير ثابتة جذر واحد على الأقل).

سنبحث في هذا الفصل خواص الأعداد المركبة .

يعطي مفهوم التفاضل والتكامل للدوال ذوات القيمة المركبة عمقاً جديداً في الرياضيات ، فضلاً على أن طبيعة المتغير المركب تقدم نتائج مفيدة في الرياضيات التطبيقية .

الأعداد المركبة وجبرها

Complex Numbers and their Algebra;9

معلوم أن مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$ تحقق خمس قواعد جبرية تسمى مسلمات الحقل وهي : من أجل الأعداد الحقيقية $a,b,c\in\Re$

1. قانون التبديل : $ab=ba \quad and \quad a+b=b+a$

2. قانون التجميع : $(ab)c=a(bc) \quad and \quad (a+b)+c=a+(b+c)$

3. قانون التوزيع : $(a+b)c=ac+bc \quad and \quad a(b+c)=ab+ac$

4. العنصر الحيادي : الصفرحيادي الجمع والواحد حيادي الضرب

$$a.1=a=1.a \quad and \quad a+0=a=0+a$$

5. النظير الجمعي والضربي :

$$a.+(-a)=0=(-a)+a \quad and \quad a.a^{-1}=1=a^{-1}.a$$

مشكلة وحل :

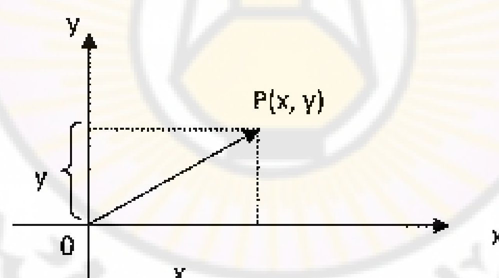
من أهم نقائص الأعداد الحقيقية $\Re$ أنها لاتزودنا بجميع الحلول الممكنة لمعادلات كثيرات الحدود مثل المعادلة $x^2+1=0$ التي لايمكن أن تحل باستخدام الأعداد الحقيقية لأن مربع عدد حقيقي عدد غير سالب .

وللتخلص من هذا النقص نعرف مجموعة الأعداد المركبة C على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (المتجهات) $z = (x, y)$ من الأعداد الحقيقية حيث تحقق هذه الأزواج عمليتي الجمع والضرب التاليتين :

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$
$$(x, y).(a, b) = (xa - yb, xb + ya)$$

تمثيل العدد المركب :

يمكن تمثيل العدد المركب من الشكل $z = (x, y)$ بنقطة في المستوي الديكارتي إحداثياها x, y أو بالمتجه (قطعة مستقيمة موجهة) مبدؤه نقطة الأصل O و نهايته النقطة (x, y) كما في الشكل التالي



وبنفس الطريقة نعبر عما يلي :

1. مجموع عددين مركبين $(x, y), (a, b)$ يمثل بالمتجه مبدؤه نقطة الأصل O و نهايته النقطة $(x + a, y + b)$.

2. مضروب عددين مركبين $(x,y),(a,b)$ يمثل بالمتجه مبدؤه نقطة الأصل O و نهايته النقطة $(xa-yb, xb-ya)$.

تمثيل العدد المركب ديكارتياً :

مجموعة الأعداد المركبة تحتوي على الأعداد الحقيقية كمجموعة جزئية منها ، حيث إن : $(x,y)=(x,0)+(0,1).(y,0)$

المقدار التخيلي (الرمز i):

إذا مثلنا $(x,0)$ بالعدد x و رمزنا للمقدار $(0,1)$ بالرمز i فبإمكاننا كتابة العدد المركب $z=(x,y)$ على الشكل : $z=x+i\,y$ وهي القيمة القياسية للأعداد المركبة والرمز i يسمى *المقدار التخيلي* ويحقق الخاصية :

$$i.i=(0,1).(0,1)=(-1,0)$$
$$\Rightarrow i^2=-1$$

جزءا العدد المركب :

بما أن $z=x+i\,y$ ، فإننا نسمي العدد $\operatorname{Re} z=x$ الجزء الحقيقي للعدد z، بينما نسمي العدد $\operatorname{Im} z=y$ الجزء التخيلي للعدد z .

معكوس العدد المركب:

إن المعكوس **الجمعي** للعدد المركب $z=x+i\,y$ **هو** $-z=-x-i\,y$ ، **بينما** المعكوس **الضربي** للعدد المركب $z=x+i\,y$ **هو :**

$$z^{-1} = \frac{1}{x+iy}$$
$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

مثال1 :

بفرض لدينا العددان $z_1 = 3+4i$ و $z_2 = 1-4i$ والمطلوب :

1. أوجد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد z_1 .
2. أوجد $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ و $z_1 . z_2$.
3. اكتب الكسر $\frac{z_1}{z_2}$ على شكل عدد مركب ؟
4. أوجد المعكوس **الجمعي** $-z_2$ و المعكوس **الضربي** z_2^{-1} .

الحل:

1. إن الجزء الحقيقي للعدد z_1 هو $\text{Re}\, z_1 = 3$ والجزء التخيلي للعدد z_1 هو $\text{Im}\, z_1 = 4$
2. لحساب الطلب الثاني نكتب :

$$z_1 + z_2 = 4$$
$$z_1 - z_2 = 2 + 8i$$
$$z_1 . z_2 = 19 - 8i$$

3. لكتابة الكسر $\frac{z_1}{z_2}$ على شكل عدد مركب نضرب البسط والمقام بمرافق المقام فنجد:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(3+4i).(1+4i)}{1+16}=$$
$$\frac{(3-16)+(12+4)i}{17}=\frac{-13}{17}+\frac{16}{17}i$$

4. إن $-z_2=-1+4i$ بينما المعكوس الضربي z_2^{-1} فهو $z_2^{-1}=\frac{1+4i}{17}$

مرافق العدد المركب ($\bar{z}$):

مرافق العدد المركب $z=x+iy$ هو $\bar{z}=x-iy$ ، ومن أهم فوائد المرافق هي :

1. ضرب أي عدد مركب $z=x+iy$ بمرافقه $z=x-iy$ هو عدد حقيقي $z.\bar{z}=x^2+y^2$ الأمر الذي يفيدنا في تبسيط الكسور التي مقامها عدد مركب فنضرب البسط و المقام بمرافق المقام للحصول على عدد مركب $z=x+iy$.

2. أن مرافق المرافق لأي عدد مركب z هو العدد المركب ذاته $\bar{\bar{z}}=z$.

خواص مرافق العدد المركب (z):

1. المرافق لمجموع عددين مركبين هو مجموع المرافقين :

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

الإثبات :

إذا كان $z_1 = x_1 + i\,y_1$ و $z_2 = x_2 + i\,y_2$ فإن :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2)}$$

$$= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 - i\,y_1) + (x_2 - i\,y_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

2. المرافق لفرق عددين مركبين هو فرق المرافقين :

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

الإثبات :

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2)}$$

$$= \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)$$

$$= (x_1 - i\,y_1) - (x_2 - i\,y_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

3. المرافق لمضروب عددين مركبين هو مضروب المرافقين :

$$\overline{z_1 \,.\, z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

الإثبات :
$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{(x_1 + i\,y_1).(x_2 + i\,y_2)}$$

$$= \overline{(x_1.x_2 - y_1.y_2) + i\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

$$= x_1\ (x_2 - i_1 y_2) - i y_1\ (x_2 - i_1 y_2)$$

$$= (x_1 - i\,y_1).(x_2 - i\,y_2) = \bar{z}_1.\bar{z}_2$$

4. مرافق مضروب عدد حقيقي α بالعدد المركب z هو ناتج ضرب العدد الحقيقي α بمرافق العدد المركب : $\overline{\alpha . z} = \alpha . \bar{z}$

الإثبات: اعتماداً على الخاصة 4 نجد :

$$\overline{\alpha . z} = \overline{\alpha} . \overline{z} = \alpha . \bar{z}$$

5. المرافق لقسمة عددين مركبين هو ناتج قسمة المرافقين :

$$\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

الإثبات : إن
$$\overline{z_1 / z_2} = \overline{(z_1 . \overline{z_2}) / (\overline{z_2} . z_2)}$$

و اعتماداً على القاعدة $z.\bar{z} = x^2 + y^2$ عدد يمكن إخراجه خارج المرافق :

$$\overline{z_1 / z_2} = \frac{1}{(z_2 . \overline{z_2})}\overline{(z_1 . \overline{z_2})}$$

و اعتماداً على الخاصة 4 نجد : $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{1}{(z_2 . \overline{z_2})}\overline{(z_1 . z_2)}$

طويلة العدد المركب ($|z|$):

هي الجذر الموجب للمضروب $z.\bar{z}$ ، أي أن : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

وهو عدد حقيقي يعبر عن طويلة المتجه z.مما تقدم نستنتج أن :

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تعميم :

يمكننا تعميم فكرة الجمع و الطرح والضرب لعددين مركبين إلى أكثر من عددين مركبين وتبقى الخواص السابقة صحيحة .

الخلاصة :

المرافق لمجموع (أو فرق أو ضرب أو قسمة) عددين مركبين هو ناتج جمع (أو فرق أو ضرب أو قسمة) المرافقين أي :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

3. $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

4. $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$

5. $z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

6. $z = \bar{\bar{z}}$

7. $\overline{\alpha . z} = \alpha . \bar{z}$

مثال 2

بفرض لدينا العدد $z = x + i.y$ أثبت :

.1 $z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$

.2 $z - \bar{z} = 2.i.y = 2.i.\mathrm{Im}(z)$

.3 $z^2 - \bar{z}^2 = 4.i.x.y = 4.i.\mathrm{Im}(z^2)$

الإثبات :

بالتعويض المباشر عن z و $\bar{z}$ بقيمتها نحصل على الإثباتات المطلوبة .

تمارين (1,1)

بفرض لدينا العددان $z_1 = 30 + 4i$ و $z_2 = 10 - 4i$ والمطلوب :

1. أوجد $z_1 + z_2$ و $z_1 \cdot z_2$.
2. أوجد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي لكل من $z_1 + z_2$ و $z_1 \cdot z_2$.
3. اكتب الكسر $\frac{z_1}{z_2}$ على شكل عدد مركب ؟
4. أوجد المعكوس **الجمعي** $-z_2$ و المعكوس **الضربي** z_2^{-1} .
5. أثبت أن $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$.
6. أثبت أن $\text{Re}(z) = \text{Im}(iz)$.
7. أثبت أن المرافق لمرافق أي عدد مركب z هو العدد المركب z .
8. أثبت صحة مايلي :

$(2.5 + 2.5i)(1 - 1.i) = 5$	$(1 + 2.i)(1 - 2.i) = 5$
$\frac{(1 + 2.i)}{(1 - 2.i)} = -0.6 + 0.8i$	$\frac{1 + 2.i}{4 - 1.i} = 0.118 + 0.529i$
$\frac{(1 + 2.i)}{(1 - 2.i)} - (-1.6 + 6.8i) = 1 - 6i$	$\frac{17.i}{4 - 1.i} + \frac{10}{(1 - 2.i)} = 1 + 8i$
$\frac{[(1 + 2.i)(1 - 2.i)]}{(2.5 + 2.5)} = 1 - i$	$\frac{(1 + 2.i)(1 - 2.i)}{1 - 1.i} = 2.5 + 2.5i$

$\dfrac{[(1+2.i)(1-2.i)]}{(2.5+2.5i)} = 1-i$	$\dfrac{(1+2.i)(1-2.i)}{1-1.i} - (0.5+0.5i) - 2+2i$
$\dfrac{[(2.5+2.5i)(1-1.i)]}{5.i} = -i$	$\dfrac{(1+2.i)(1-2.i)}{(1-1.i)(2.5+2.5i)} = 1$

بعض الإجابات :

$z_1 z_2 = 316 - 80i$	$z_1 + z_2 = 40$
$\dfrac{z_1}{z_2} = 2.448 + 1.379i$	$z_1 - z_2 = 20 + 8i$
$(z_2)^{-1} = 0.09 + 0.03i$	$-z_2 = -10 + 4i$

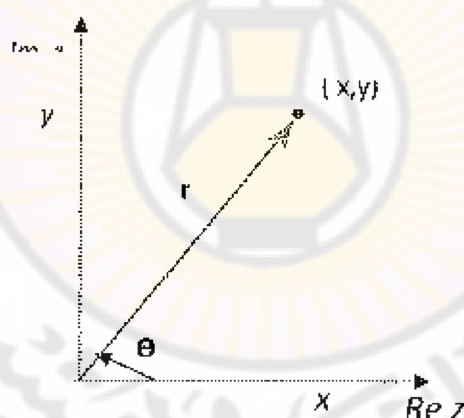
التمثيل القطبي Polar Representation

إذا اعتبرنا أن العدد المركب $z=(x,y)$ متجه فإن طويلته وزاوية دوران هذا المتجه مع محور السينات تحددان العدد المركب بشكل وحيد نسميه التمثيل القطبي للعدد المركب $z=(x,y)$ أي أن $z=(r,\theta)$ حيث إن :

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad r\geq 0$$

$$\theta=\arctan\frac{y}{x} \quad ; \quad -\pi\leq\theta<\pi$$

كماهو موضح بالرسم التالي :



تسمى القيمة الأساسية للإزاحة الزاوية (argument)، ويرمز لها بالرمز Arg z و نستخدم العبارة : $Arg\, z + 2\pi K$ ، حيث k عدد صحيح ثابت ، للدلالة على زاوية معينة .

التمثيل المثلثي : وبالرجوع إلى المتجه الأصلي z نلاحظ أن :

$$x = r\cos\theta = |z|\cos(\arg z)$$
$$y = r\sin\theta = |z|\sin(\arg z)$$

وبالتالي : $z = x + i\,y = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$

أو يمكننا أن نكتب : $z = |z|[\cos(\arg z) + i\,\sin(\arg z)]\ ,z \neq 0$

وهو التمثيل المثلثي للعدد المركب z .

التمثيل الأسي :

اعتماداً على صحة العلاقة المثلثية التي تربط بين الحالة المثلثية و الأسية التالية :

$e^{i\theta} = (\cos\theta + i\,\sin\theta)$ نستنتج الصيغة الأسية للعدد المركب:

$$z = r.e^{i\theta}$$

الخلاصة : نستطيع التعبير عن العدد المركب بإحدى الحالات التالية

1. **التمثيل الديكارتي** $z=(x,y)=x+i\,y$

2. **التمثيل القطبي** $z=(r,\theta)$

3. **التمثيل المثلثي :** $z=r.\cos\theta+i\;r.\sin\theta$

4. **التمثيل الأسي :** $z=r.e^{i\theta}$

مع إمكانية الرسم البياني لكل حالة من الحالات السابقة .

مثال 3 أوجد التمثيل القطبي للأعداد التالية

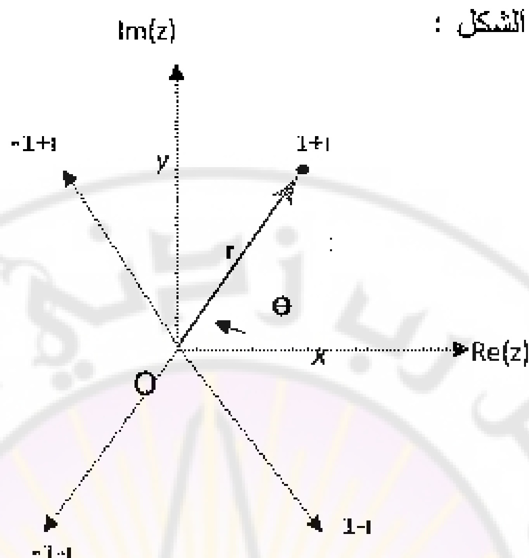
1. $1+i$ 2. $1-i$

3. $-1+i$ 4. $-1-i$

نلاحظ أن :

العدد المركب	الطويلة	الزاوية
$1+i$	$\lvert 1+i\rvert$	$\arg(1+i)=45.0$
$1-i$	$\lvert 1-i\rvert$	$\arg(1-i)=-45.0$
$-1-i$	$\lvert -1-i\rvert$	$\arg(-1-i)=-135.0$
$-1+i$	$\lvert -1+i\rvert$	$\arg(-1+i)=135.0$

لاحظ الشكل :



الزوايا القطبية غير وحيدة التحديد ، أي أن زاوية الميل تأخذ قيماً متعددة كما يلي :

$$1.\quad \arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$2.\quad \arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$3.\quad \arg(-1-i)=-3\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$4.\quad \arg(-1+i)=3\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

حيث إن k عدد صحيح ، و بالتالي فالتمثيل القطبي للأعداد السابقة هو :

1. $1+i=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4}+2\pi k)+i\sin(\frac{\pi}{4}+2\pi k)\right]$

2. $1-i=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)+i\sin(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)\right]$

3. $-1+i=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+2\pi k)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+2\pi k)\right]$

4. $-1-i=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4}+\pi+2\pi k)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\pi+2\pi k)\right]$

نظرية دوموافر (De Mover's theorem) :

أثبت صحتها العالم الفرنسي أبراهام دوموافر (1667–1754) م والتي تتلخص بالعلاقة : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

حيث إن n عدد طبيعي. ولنظرية **دوموافر** تطبيقات مفيدة منها النتيجة التالية :

نتيجة (1): نستطيع حساب عدد مركب من الشكل z^n كما يلي :

$$z^n=r^n.e^{i.\theta}=r^n.(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$=r^n\cos n\theta+i\ r^n\sin n\theta)$$

مثال 4

احسب كلاً من العددين التاليين : $z_1=(1+i)^8\ ,\ z_2=(1+i)^9$

الحل : نستطيع أن نضرب العدد $(1+i)$ في نفسه 8 مرات للحصول على الناتج ، و لكن باستخدام نظرية دوموافر نحصل على الجواب بطريقة أسهل :

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4}+2\pi k)+i\sin(\frac{\pi}{4}+2\pi k)\right]$$

وباستخدام القيمة الأساسية للزاوية نحصل على المساواة :

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right]$$

ومن نظرية دوموافر نحصل على :

$$(1+i)^8=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right]^8$$

$$=2^4\left[\cos(8\frac{\pi}{4})+i\sin(8\frac{\pi}{4})\right]=16\,(1+i.o)=16$$

وبالتالي : $z_1=16$ وبنفس الطريقة السابقة نجد أن :

$$(1+i)^9=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right]^9$$

$$=2^{\frac{9}{2}}\left[\cos(9\frac{\pi}{4})+i\sin(9\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=2^{\frac{9}{2}}\left[\cos(\frac{\pi}{4}+2\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+2\pi)\right]$$

$$=2^{\frac{9}{2}}\left[\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right]=2^{\frac{9}{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

$$\Rightarrow z_2=16+16i$$

طريقة ثانية لحساب $z_2=(1+i)^9$

$$z_2=(1+i)^9=(1+i)^8(1+i)=16\,(1+i)=16+16i$$

نتيجة (2): نستطيع حساب جذور لعدد مركب من الشكل $z^n=w$ اعتماداً

على نظرية دوموافر (حيث إن n عدداً صحيحاً أ و عادياً) :

$$z^n = r^n \left[(\cos\theta + 2\pi k) + i\sin(\theta + 2\pi k)\right]^n$$

$$= r^n \cos n(\theta + 2\pi k) + i\ r^n \sin n(\theta + 2\pi k)$$

مثال 5 أوجد جذور المرتبة الثانية و الثالثة و الرابعة للعدد $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

الحل : نحول إلى الشكل المثلثي $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ ، فنكتب:

$$r = |z| = 1$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{6} + 2\pi.k \qquad ;\ k = 0,1,2..,n$$

حيث إن n مرتبة الجذر ، أي أن :

$$w = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$= \left[\cos(\frac{\pi}{6} + 2\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi k)\right]$$

وبواسطة **نظرية دوموافر** نجد :

1. عندما n=2 نجد م: $w^{\frac{1}{2}} = \left[\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{2})\right]$

يوجد جذران هما :

$$z_0=\left[\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12})\right]=(1,\frac{\pi}{12})$$

$$z_1=\left[\cos(\frac{\pi}{12}+\pi)+i\sin(\frac{\pi}{12}+\pi)\right]=(1,\frac{13\pi}{12})$$

2. عندما n=3 نجد : $w^{\frac{1}{3}}=\left[\cos(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3})+i\sin(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3})\right]$

يوجد ثلاثة جذور هي :

$$z_0=\left[\cos(\frac{\pi}{18})+i\sin(\frac{\pi}{18})\right]=(1,\frac{\pi}{18})$$

$$z_1=\left[\cos(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3})\right]=(1,\frac{13\pi}{18})$$

$$z_2=\left[\cos(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3})\right]=(1,\frac{25\pi}{18})$$

3. عندما n=4 نجد : $w^{\frac{1}{4}}=\left[\cos(\frac{\pi}{24}+\frac{2\pi k}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4})\right]$

أي يوجد أربعة جذور هي :

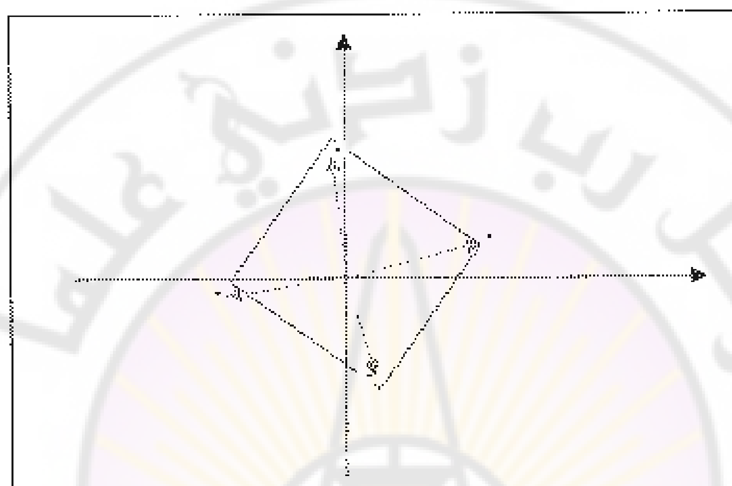
$$z_0=\left[\cos(\frac{\pi}{24})+i\sin(\frac{\pi}{24})\right]=(1,\frac{\pi}{24})$$

$$z_1=\left[\cos(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2})\right]=(1,\frac{13\pi}{24})$$

$$z_2=\left[\cos(\frac{\pi}{24}+\pi)+i\sin(\frac{\pi}{24}+\pi)\right]=(1,\frac{25\pi}{24})$$

$$z_3=\left[\cos(\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2})\right]=(1,\frac{37\pi}{24})$$

إن جذور العدد المركب في كل حالة من الحالات تشكل مضلعاً منتظماً كما في الشكل :



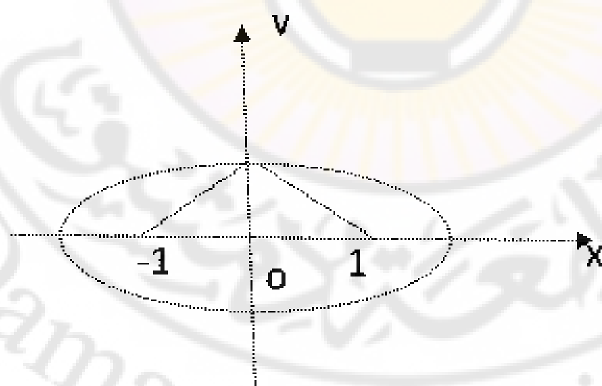
القطوع المخروطية :

نستطيع تعريف القطوع المخروطية (القطع الناقص و القطع الزائد ،و القطع المكافئ) بدلالة المسافة كما يلي :

1. القطع الناقص :

يعرف القطع الناقص على أنه مجموعة نقاط المستوي الإحداثي التي يكون مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين في هذا المستوي يساوي مقداراً ثابتاً . و تسمى النقطتان A , B بؤرتي القطع الناقص ، ولنوجد القطع الناقص الذي يمر بالنقطة i ، و بؤرتاه $A=+1 \ , B=-1$.

الحل: إن المتجه $z-z_0$ من النقطة z_0إلى النقطة z ، و اعتماداً على تعريف القطع الناقص نجد : $|z-1|+|z+1|=c$ الشكل التالي :



حيث c عدد حقيقي ثابت ، وبما أن $z=i$ تحقق هذه المعادلة

إذاً $|i-1|+|i+1|=2\sqrt{2}=c$

فالقطع الناقص يعطى بالمعادلة : $|z-1|+|z+1|=2\sqrt{2}$

2. القطع المكافئ :

يعرف القطع المكافئ على أنه مجموعة نقاط المستوي الإحداثي التي يكون مجموع بعدها عن نقطة ثابتة A في هذا المستوي يساوي بعدها عن مستقيم ثابت ما . و تسمى النقطة A بؤرة القطع المكافئ ، ويسمى المستقيم L دليله) ، لنوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته i و دليله المستقيم $y=-1$.

الحل: اعتماداً على تعريف **القطع المكافئ** نجد : $|z-i|=y+1$

و بالإصلاح نجد : $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=y+1$

وبالتربيع نجد :

$$x^2+(y-1)^2=y^2+1+2y$$

$$\Rightarrow x^2=4y \Rightarrow y=\frac{x^2}{4}$$

3. القطع الزائد:

يعرف القطع **الزائد** على أنه مجموعة نقاط المستوي الإحداثي التي يكون فيها فرق بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين في هذا المستوي يساوي مقداراً ثابتاً . و تسمى النقطتان A , B بؤرتي القطع الزائد ، ولنوجد القطع الزائد الذي يمر بالنقطة 1+i ، و بؤرتاه $B=-1$, $A=+1$؟

الحل: اعتماداً على تعريف القطع الزائد نجد : $|z-1|-|z+1|=c$

حيث c عدد حقيقي ثابت ، وبما أن $z=1+i$ تحقق هذه المعادلة الشكل (4-1)

إذاً $|i-1|-|i+1|=-1+\sqrt{5}=c$

فالقطع الزائد يعطى بالمعادلة : $|z-1|-|z+1|=-1+\sqrt{5}$.

حالة خاصة : عندما يكون c=0 نحصل على مستقيم منطبق على المحور oy لأن :

$$|x+iy-1|-|x+iy+1|=0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+y^2=(x+1)^2+y^2$$
$$\Rightarrow x=0$$

تمارين داعمة

في التمارين التالية من (1) وحتى (12) أوجد الطويلة ، و الزاوية ، ثم التمثيل القطبي للأعداد المركبة التالية :

1.	i^3	2	$-i^3$	3	$1-i$
4	$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	5	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	6	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
7	$\sqrt{3}-i$	8	$-\sqrt{3}-i$	9	$-\sqrt{3}+i$

10	$2-i$	11	$12-5i$	12	$1+5i$

في التمارين التالية من (13) وحتى (18) استخدم نظرية دوموافر لكتابة كل الأعداد المركبة بالصيغة $x+iy$:

13	$(1+i)^{11}$	14	$(1-i)^{13}$	15	$(3-3i)^{16}$
16	$\left(\sqrt{3}-i\right)^{7}$	17	$\left(\sqrt{3}+i\right)^{7}$	18	$\left(\sqrt{2}+i\right)^{17}$

في التمارين التالية من (19) وحتى (24) استخدم نظرية دوموافر لإيجاد جميع الحلول لكل من المعادلات التالية :

19	$z^2=1+i$	20	$z^2=-i$	21	$z^2=-1+i$
22	$z^3=1+\sqrt{3}\,i$	23	$z^3=2+i$	24	$z^4=1+i$

25. أوجد جذور المرتبة الثانية و الثالثة و الرابعة و الخامسة للعدد $1+i$ مع رسم جذور المرتبة الخامسة .

26. أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $\pm i$ ويمر بالنقطة $1+i$. ماالصيغة المناظرة في الهندسة التحليلية .

27. أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه i و 1 ويمر بالنقطة 0 . ماالصيغة المناظرة في الهندسة التحليلية .

28. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $1+i$ و دليله المستقيم $x+y=0$.

29. أوجد المعادلة العامة في الصورة المركبة للقطع الزائد الذي بؤرتاه a , b

تمارين محلولة

أولاً : تمارين (Solved Problems)

تمرين 1 بسط التركيب التالي: $Z=2+2i-\frac{2}{2+2i}$ واكتب الناتج بالشكلين الجبري و المثلثي :

الحل: أولاً جبرياً: بالإصلاح نجد : $Z=2+2i-\frac{2(2-2i)}{4+4}$

$$\Rightarrow Z=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i=x+iy$$

أي أن الشكل الجبري (الديكارتي) هو : $y=\frac{5}{2}$ $x=\frac{3}{2}$

ثانياً مثلثياً : $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}}$

$$r = \frac{\sqrt{34}}{2} \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تمرين 2 احسب الجذور الأربعة للعدد 1 من المرتبة الرابعة:

الحل: نكتب العدد 1 بالشكل :

أي أن : $Z = 1 = e^{i(2k\pi)}$

$$Z^{\frac{1}{4}} = e^{i(\frac{2\pi k}{4})} \qquad k = 0,1,2,3$$

فالجذور الأربعة هي : $Z_0 = 1 \ , \ Z_1 = e^{i(\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$$Z_2 = e^{i(\frac{\pi 4}{4})} = e^{i(\pi)} = -1 \ , \ Z_3 = e^{i(\frac{3\pi}{2})} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^3 = -i$$

نلاحظ أن: $Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$

تمرين 3 عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب:

$Z = \ln(3+i)$

الحل : لنكتب العدد $Z=3+i$ بالشكل الأسي، حيث إن :

$x=3\ ,\ y=1$

$$r=\sqrt{3^2+1^2}=2\ ,\ \theta=tg^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=0.32\ Rad=18.34Dgr$$

$$Z=\ln(2e^{i(18.32+360k)})\ \Rightarrow Z=\ln 2+i(18.32+360k)$$

تمرين 4 احسب الأجزاء الحقيقية والمركبة للتراكيب التالية:

$Z_2=\ln(\sqrt{3}+i)$	$Z_1=\ln(-5)$
$Z_4=\ln(2-2i)$	$Z_3=(i)^i$

الحل: أولاً :نبدأ من $Z_1=\ln(-5)$

$$Z_1=\ln(-1)5=\ln(-1)+\ln 5=\ln 5+\ln(e^{i(\pi+2\pi k)})$$

$$Z_1=0.6989+i(\pi+2\pi k)\quad ;\quad x=0.6989\quad ;\quad y=(\pi+2\pi k)$$

ثانيـاً: $Z_2=\ln(\sqrt{3}+i)$ لنكتـب العبـارة $\sqrt{3}+i$ بالشـكل الأسـي

حيث إن : $y=1$, $x=\sqrt{3}$ فنجد :

$$r=\sqrt{3+1}=2\ ,\ \theta_2=tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$Z_2=\ln[2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)}]=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$$

$$=0.301+i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\quad ;\quad x=0.301\quad ;\quad y=\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

ثالثاً : $Z_3=(i)^i$ حيث إن $i=e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$ و بالتالي :

$$(i)^i=e^{i\ln i}=e^{i[i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)]}=e^{-\frac{\pi}{2}}.e^{i2\pi k}=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

رابعاً : $Z_4=\ln(2-2i)$

لنكتب العبارة $2-2i$ بالشكل الأسي حيث إن $y=-2$ $x=2$

$$r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\ ,\ \theta=tg^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right)=tg^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$Z_4=\ln 2\sqrt{2}e=\ln 2^{\frac{3}{2}}+i(\frac{7}{4}\pi+2\pi k)=\frac{3}{2}\ln 2+i(\frac{7}{4}\pi+2\pi k)$$

تمـــرين 5 لـديـنا إحـداثيات رؤوس المثلـث ABC هـي: $A(1,2),B(4,-2),C(1,-6)$ بـرهن أن هـذا المثلـث متساوي السـاقين واحسب أطوال أضلاعه معتمداً على مفهوم العدد المركب.

الحل: نلاحظ أن النقاط C, B, A تمثل الأعداد المركبة التالية:

$$A \equiv Z_1 = 1+2i \quad , \quad B \equiv Z_2 = 4-2i \quad , \quad C \equiv Z_3 = 1-6i$$

وبالتالي يمكن معرفة أطوال أضلاع المثلث السابق كما يلي:

$$|Z_1 - Z_2| = |(1-4) + i(2+2)| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|Z_1 - Z_3| = |(1-1) + i(2+6)| = |i(8)| = 8$$

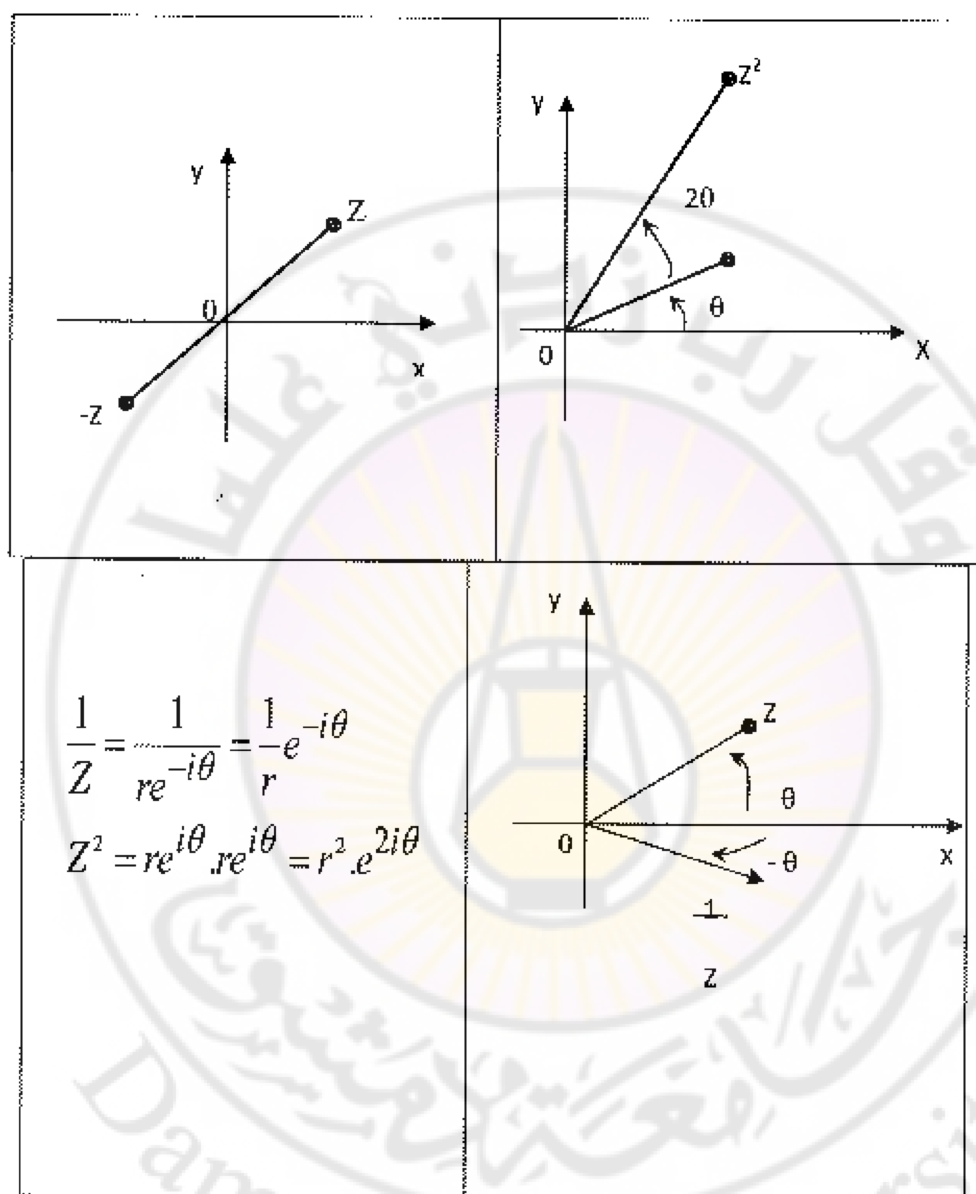
$$|Z_2 - Z_3| = |(4-1) + i(-2+6)| = \sqrt{9+16} = 5$$

إذاً فالمثلث متساوي الساقين.

تمرين 6

بفرض Z عدداً مركباً حيث $Z = x+iy$ أو $Z = re^{i\theta}$ معلوم عين بالرسم الأعداد التالية: $\bar{Z}, \ -Z, \ \frac{1}{Z}, \ Z^2$

الحل: انظر الأشكال التالية : إن $-Z = -x-iy$



$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{re^{-i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$Z^2=re^{i\theta}.re^{i\theta}=r^2.e^{2i\theta}$$

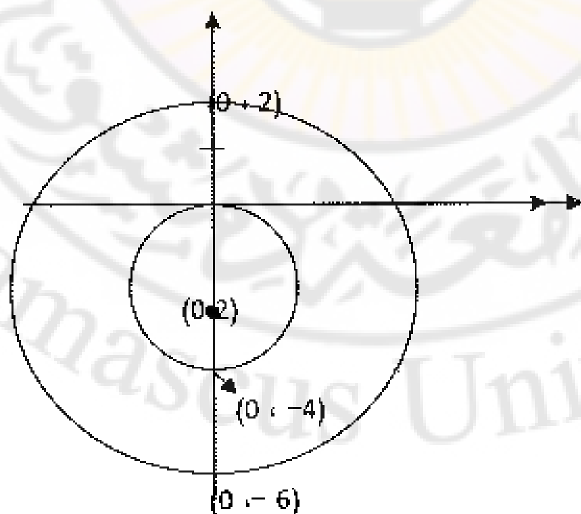
تمرين 7 عين في المستوي المركب Z المجموعات النقطية التالية:

أ . $2 \leq |Z + i2| \leq 4$ ب . $\arg\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right) = 0$

ج . $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| = 2$ د . $\left|\frac{Z+2}{Z-2}\right| > \frac{1}{2}$

هـ . $5 \leq |Z+1| + |Z-1|$ و . $|Z+1||Z-1| = 1$

الحل : أ ـ سوف نحل هذه المسألة هندسياً أولاً ثم جبرياً المجموعة $2 \leq |Z + 2i|$ تمثل خارج (مع المحيط) دائرة مركزها $(0 \ , \ -2)$ ونصف قطرها 2 والمجموعة $|a + 2i| < 4$ تمثل داخل الدائرة وبالتالي المجموعة المطلوبة هي خارج الدائرة الأولى وداخل الثانية مع أخذ المحيطين.



ب . عين المجموعة $\arg\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)=0$ لأجل ذلك نبسط عبارة $\frac{Z+1}{Z-1}$

$$\frac{Z+1}{Z-1}=\frac{x+1+iy}{x-1+iy}=\frac{[x+1+iy][x-1-iy]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-1+y^2+i[y(x-1)-y(x+1)]}{(x-1)^2+y^2}$$

حسب الشرط يجب أن يكون البسط معدوماً أي:

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y(x-1)-y(x+1)=0$$

$$x^2+y^2-1=0 \quad y=0$$

والنقاط هي نقاط الدائرة ومحور السينات أي: $x=\pm1$ وبشكل عام $y=0$ يحقق أيضاً $\arg\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)=0$

ج . لدينا $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right|=2$

أي أن :

$$\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}=4$$

$$x^2-2x+1+y^2=4x^2+8x+4+4y^2$$

$$(x^2+y^2)+\frac{10}{3}x+1=0$$

$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2-\frac{16}{9}=0$ هي دائرة مركزها $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ نصف قطرها $\frac{4}{3}$

د . لدينا $\left|\frac{Z+2}{Z-2}\right|>2$ وبالتالي : $\left|\frac{x+2+iy}{x-2+iy}\right|>2$ نضرب بالمرافق :

$$\frac{(x+2)^2+y^2}{(x-2)^2+y^2}>4$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2>4x^2-16x+16+4y^2$$

$$\Rightarrow \left((x-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{64}{9}<0$$

وهو قرص دائري (داخل دائرة) مركزه $\left(\frac{10}{3},0\right)$ نصف قطره $\frac{5}{3}$

هـ . المجموعة $|Z+1|+|Z-1|\geq 5$ هي مجموعة النقاط التي مجموع بعديها عن (1،-1) أكبر أو يساوي 5 فهي خارج قطع ناقص محرقاه (1، 1-) ونصف محوره الكبير $\frac{5}{2}$.

و . المجموعة $|Z+1||Z-1|=1$ تصاغ بالشكل :

$$\left[(x+1)^2+y^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]=1$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2+1)^2-4x^2=1$$

وبالانتقال للحالة القطبية : $(r^2+1)^2-4r^2\cos^2\theta=1$

$$\Rightarrow r^4+2r^2-4r^2\cos^2\theta=0$$

$$\Rightarrow r^2(r^2+2-4\cos^2\theta)=0$$

$r=0$ أو $\Rightarrow r^2=4\cos^2\theta 2$

$$\Rightarrow r^2=2(2\cos^2\theta-1)=2(1+\cos 2\theta-1)$$

$$\Rightarrow r^2=2\cos 2\theta$$

تمارين إضافية *Supplementary Problems*:

1 . اكتب الأعداد التالية بالشكل $x+iy$

أ . $(2-3i)(-2+2i)(5-4i)$

ب . $(-1+3i)(7-5i)+3-4i$

ج . $(3i-5)-(6-2i)^2$

2 . ليكن $Z_2=-1+5i$ $Z_1=2-3i$ أوجد $\frac{Z_1}{Z_2}$ وفق التمثيل المثلثي.

3 . برهن اعتماداً على الأعداد المركبة أن أقطار متوازي الأضلاع متناصفة.

4. أوجد اعتماداً على الأعداد المركبة معادلة المستقيم الواصل بين نقطتين $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$.

5 . أوجد معادلة الدائرة ذات المركز (1، 2−) ونصف قطرها 4.

6 . أوجد معادلة القطع الناقص ذي نصف المحور الكبير المساوي لـ 5 والصغير المساوي لـ4 ومحوره ينطبق على محور السينات.

7 . مثل العدد المركب $Z = 2+2\sqrt{3}i$ بالشكل القطبي ثم الأسي.

8 . رجل تحرك *12km* باتجاه الشمال الشرقي ثم تحرك باتجاه °30 غرب الشمال ثم *18km* باتجاه جنوب الغرب. أوجد بطريقة تعتمد على الأعداد المركبة الاتجاه والبعد الذي أصبح فيه عن نقطة الانطلاق.

9 . برهن على صحة العلاقة التالية اعتماداً على تمثيل أولي للدوال المثلثية $Sin^3\theta = \frac{3}{4}Sn\theta - \frac{1}{4}Sin3\theta$

10 . أوجد ناتج مايلي: $Z = (-1+i)^{\frac{1}{3}}$

11 . أوجد الجذر التربيعي لكل من الأعداد التالية:

$$-15+8i \quad , \quad 9+\frac{5}{2}i \quad , \quad 5+3i$$

12 . أوجد جذور المعادلة: $Z^6=1$

13 . برهن أن مجموع جذور المعادلة: $Z^n=1$ (n طبيعي) يساوي الصفر.

14 . برهن صحة مايلي:

$$\cos\frac{2\pi}{n}+Cos\frac{4\pi}{n}+...+Cos\frac{2(n-1)}{n}\pi=-1$$

$$Sin\frac{2\pi}{n}+Sin\frac{4\pi}{n}+...+Sin\frac{2(n-1)}{n}\pi=0$$

15 . إذا كان جداء عددين مركبين هو عدد حقيقي غير الصفر برهن أن هناك عدد حقيقي P بحيث؛ $Z_1=P\overline{Z}_2$، حيث Z_2,Z_1 هما العددان المركبان.

الدوال المركبة : Complex Functions

تمهيد:

إن مجموعة النقاط Z في المستوى المركب المحققة لمساواة تمثل منحنٍ ،أما المتراجحة فتمثل نطاق في المستوي وعندما يشمل التراجح مساواة عندها نحصل على المنطقة في المستوي Z.

مثال:

بفرض $a=(x_0,x_1)$ $r>0$ عندها يكون :

$|Z-a|=r$ تمثل معادلة دائرة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

بينما $|Z-a|<r$ تمثل قرصاً دائرياً $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$

و $|Z|-a\le r$ تمثل قرصاً دائرياً مع المحيط

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$$

لقد وجدنا أن المجموعة C مجموعة الأعداد المركبة هي مجموعة الثنائيات (x,y) ووجدنا أن الأعداد المركبة يمكن تمثيلها بأكثر من شكل وأن هذه الأعداد تشكل مجموعات نقطية.

بفرض D نطاق وبفرض: $Z = x + iy = re^{i\theta}$ متحول في D.

تعريف (1) :

لنقابل كل عنصر Z من المنطلق D بعنصر W من المستقر $D`$ من مستوي O كما يلي:

$$Z = x + iy = re^{i\theta} \Rightarrow$$
$$w = f(z) = u + iv = \rho e^{i(\psi + 2\pi k)}$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تعرف دالةً متعددة القيم نسمي هذه العلاقة بدالة مركبة متعددة القيم ، كما نسمى التعيين الذي يقابل قيمة معينة ($k=0$) بالتعيين الرئيسي.

الدالة العكسية *(Inverse Functions)*:

إذا اقتصرنا على التعيين الرئيسي للدالة $W = f(z)$ عندها يمكننا تعريف الدالة العكسي ونرمز لها بـ$Z = W^{-1} = f^{-1}(w)$.

نهاية دالة مركبة *(The limt of function)*:

بفرض D نطاق من المستوي XOY ولبكن $W = f(z)$ دالة مركبة من D إلى $D`$ في المستوي UOV ولتكن Z_0 نقطة من المستوي XOY .

إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \ \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall \ |Z - Z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

حيث L قيمة ما.

نقول إن الدالة $f(z)$ ينتهي إلى L عندما Z تنتهي إلى Z_0 ونكتب:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

استمرار دالة مركبة (*The continuity of function*):

إذا كانت $Z_0 \in D$ وكانت $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ عندها نقول إن $f(z)$ مستمرة عند z_0 ونكتب: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

ملاحظة: كل دالة مستمرة في نقطة ما يكون لها نهاية عندها ، ولكن إذا كانت لها نهاية في نقطة ما فليس بالضرورة أن تكون مستمرة عندها(بل قد لا تكون معرفة في تلك النقطة).

اشتقاق دالة مركبة :

إذا كان للنسبة التالية: $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

نهاية عندما Δz تسعى إلى الصفر فإننا نسمي هذه النهاية مشتقة الدالة $f(z)$ عند النقطة z ونرمز لذلك :

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{df(z)}{dz}$$

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}$$

$$df(z)=f'(z)dz$$

يمكن تعريف المشتقات من مرتبة أعلى وفق نفس الطريقة وسوف نرى مستقبلاً أن الدالة المركبة تتصف بما يلي :

1. إذا وجد لـ $f(z)$ مشتقة فإن كل المشتقات التالية تكون موجودة. (هذه الصفة غير موجودة في الدوال الحقيقية).

2. يمكن أن تكون الدالة $f(z)$ مستمرةً في نقطة Z_0 دون أن تكون لها مشتقة فيها مثل الدالة $f(z)=|z|$ بينما إذا كانت $f(z)$ تقبل الاشتقاق في Z_0 فهي مستمرة فيها.

الدالة التحليلية (Analytic Functions):

نقول عن الدالة $f(z)$ إنها تحليلية في نقطة Z إذا كان لها مشتقة في جوار للنقطة Z (أي في كل نقطة من ذلك الجوار) وتكون تحليلية على نطاق D إذا كانت تقبل الاشتقاق في كل نقطة منه.

نظرية كوشي – ريمن في الدوال التحليلية:

بفرض $Z \to f(z)$ دالة معرفةً على نطاق D وتأخذ قيمه على نطاق D' وبفرض:

$$W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = r\,e^{i\,(\theta+2\pi k)}$$

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لتكون $f(z)$ تحليليةً على D هو في الإحداثيات الديكارتية.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

البرهان: 1– كفاية الشرط:

حتى تكون $W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

دالة تحليلية على D يكفي وجود المشتقات الجزئية التالية تحقق معادلتي كوشي ريمن.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dv}{\partial x}$$

بما أن $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}$ مستمرة فرضاً عندها يمكن كتابة:

$$\Delta U = U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x,y)$$

$$\Delta U = \{U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x, y+\Delta y)\} + \{U(x, y+\Delta y) - U(x,y)\}$$

$$= \left(\frac{du}{dx} + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{du}{dy} + \eta_1\right)\Delta y =$$

$$= \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y$$

حيث $\varepsilon_1 \to 0$ و $\eta_1 \to 0$ عندما $\begin{matrix}\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0\end{matrix}$ وبشكل مشابه يمكن استنتاج:

$$\Delta v = \left(\frac{dv}{dx} + \varepsilon_2\right)\Delta x + \left(\frac{dv}{dy} + \eta_2\right)\Delta y =$$

$$=\frac{dv}{dx}\Delta x+\frac{dv}{dy}\Delta y+\varepsilon_2\Delta x+\eta_2\Delta y$$

حيث $\varepsilon_2\to 0$ و $\eta_2\to 0$ عندما $\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{matrix}$

لدينا: $\Delta w=\Delta f(z)=\Delta u+i\Delta v$

$$=\left(\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}\right)\Delta x+\left(\frac{du}{dy}+i\frac{dv}{dy}\right)\Delta y+\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y \qquad (1)$$

حيث $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2=0$ و $\eta=\eta_1+i\eta_2$ عندما $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$

وحسب علاقات كوشي – ريمن المحققة يمكننا كتابة العلاقة (1) :

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y+\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y$$

نقسم الطرفين على $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ فنجد عندما $\Delta z\to 0$ مايلي:

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{\Delta z\to 0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}$$

أي أن المشتقة W' موجودة والدالة تحليلية .

ملاحظة:

نلاحظ أن : $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y}{\Delta z}=0$

لأن البسط متناهٍ في الصغر من مرتبة ثانية بالنسبة للمقام.

1. لزوم الشرط:

لنفرض أن $f(z)$ دالة تحليلية أي لها مشتقة وبالتالي فإن النهاية التالية موجودة دون النظر إلى الطريق التي تسعى فيه Δz إلى الصفر

أي $\quad f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\qquad \forall\Delta z\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{U(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$-\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{U(x,y)+iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

لنختار $\Delta z=\Delta x$ عندها:

$$W'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}+i\,\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{V(x+\Delta x,y)-V(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x,y)}{x}+i\lim\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}$$

$$W' = \frac{\partial u}{dx} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

كذلك الأمر يمكن أن تكون $\Delta z = i\Delta y$ عندها وبسبب وجود المشتقة

يمكننا كتابة: $$W' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{U(x, y + \Delta y) - U(x, y)}{i\Delta y} +$$

$$+ i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{V(x, y + \Delta y) - V(x, y)}{i\Delta y}$$

$$W' = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

من (2) و (3) نجد: $$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

بالمطابقة نجد: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ وهو المطلوب.

نتيجة :

يمكن البرهان في الحالة القطبية كمايلي:

الطلب: $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

حيث: $$f(z) = U(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

لدينا: $$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)$$

لهذا تكون لدينا العلاقة :

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{du}{dr}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{du}{d\theta}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}Cos\theta - \frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}Sin\theta \qquad (1)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} = \left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) +$$

$$+\frac{du}{d\theta}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{du}{dr}Sin\theta + i\frac{du}{rd\theta}Cos\theta \qquad (2)$$

وبشكل مشابه نجد:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{dv}{dr}Cos\theta - \frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta}Sin\theta \qquad (3)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} = \frac{dv}{dr}Sin\theta + \frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta}Cos\theta \qquad (4)$$

وحسب كوشي ريمان يلزم أن تكون :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نجد من (1) و (4): $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) Cos\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) Sin\theta \qquad (5)$$

كذلك الأمر من أجل $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ وفق (2) و (3) نجد:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) Sin\theta = -\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) Cos\theta \qquad (6)$$

تضرب (5) بـ $Cos\theta$ و(6) بـ $Sin\theta$ ونجمع فنجد: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\delta\theta$

تضرب (5) بـ $Sin\theta$ و (6) بـ $Cos\theta$ ونجمع فنجد: $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

وهو المطلوب.

الدالة التحليلية ومعادلة لابلاس Analytic Function and Laplas equation

بفرض $W = f(z) = u + iv$ دالة تحليلية عندها:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ومنه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

بالجمع نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 u(x, y) = 0$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 v(x, y) = 0$$

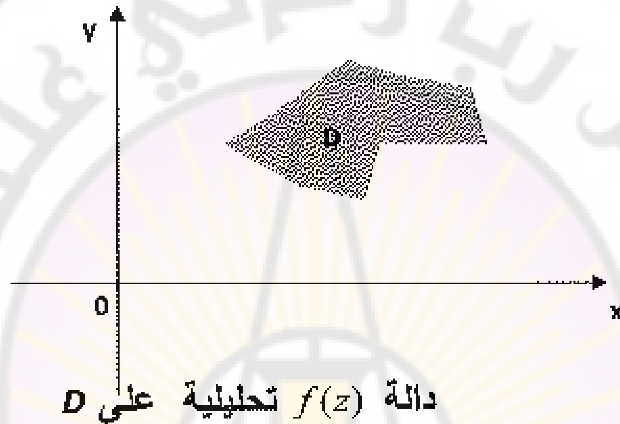
نسمي كلاً من v و u بجزئين توافقيين.

الدالة التحليلية والنقاط العادية والشاذة:

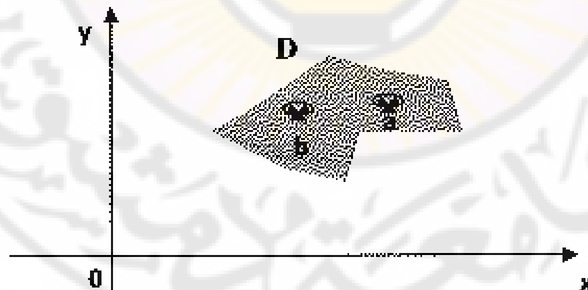
Analytic Function and Singular Points and ordinary Point:

نعتبر أن الدالة التحليلية $f(z)$ على نطاق Dهي دالة خالية من نقاط شاذة وسوف نظلل ذلك النطاق كما في الشكل وفي حال وجود نقاط شاذة سوف نضعها ضمن دائرة وإشارة × أي بالرمز ⊗.

النقاط التي لا تكون فيها الدالة تحليلية تسمى نقاط شاذة سنذكرها لاحقاً مع أنواعها، وإذا كانت النقطة غير شاذة تدعى نقطة عادية إذا أمكن إيجاد جوار لها لا يحوي نقاطاً شاذة.



دالة $f(z)$ تحليلية على *D*



دالة $f(z)$ تحليلية على *D* فيما عدا النقطتين *b* , *a*

تصنيف النقاط الشاذة: Class faction The an Ordinary Points

1 . النقاط الشاذة المنعزلة وغير المنعزلة:

نسمي النقطة $z=0$ نقطة شاذة منعزلة بالنسبة للدالة $w=f(z)$ في نطاق D إذا وجد جوار لها داخل D بحيث إنه لا يحوي أي نقطة شاذة غيرها، و إذا لم نتمكن من ذلك سميت نقطة شاذة غير منعزلة.

هناك نقاط شاذة يمكن إزالتها تدعى نقطة شاذة منعزلة القابلة للحذف وهي تلك النقطة التي لا تكون فيها الدالة $f(z)$ معرفةً فيها ، ولكن لها نهاية عندها.

مثال : الدالة $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z+1}$ تملك نقطة شاذة هي $z=-1$ شاذة يمكن إزالتها لأن:

$$\lim_{z\to -1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+1)}{z+1}=-2$$

يمكن تصنيف النقاط الشاذة كمايلي:

2 . النقطة الشاذة(القطب المضاعف) من الرتبة n.

نقول عن النقطة Z_0 إنها قطب مضاعف من المرتبة n إذا تحقق مايلي:

1. $f(z_0)$ دالة غير معرفة .

2. النهاية $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)\neq 0$ هي نهاية موجودة.

3 . النقطة الشاذة الأساسية:

$f(z_0)$ غير معرفة و $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ غير موجودة مهما يكن n (عدد طبيعي).

4 . نقطة التفرع:

بفرض z_0 نقطة والدالة $W=f(z)$ تحقق الخاصة التالية:

إذا رسمنا أي منحنى مغلق يحيط بـ Z_0 وتجولنا حول Z_0 دورة كاملة تغيرت قيمة الدالة أي تفرعت القيمة سوف نرى أمثلة على ذلك في الدوال اللغاريتمية والجذرية. (مع ملاحظة أن المنحني المغلق لا يحوي نقاطاً شاذة غير Z_0).

الدوال الأساسية المركبة :

هي الدوال التي تشمل كل الدوال الناتجة بعمليات جبرية محددة:

1 . دالة كثيرة الحدود (الحدودية) من الدرجة n.

إن الشكل العام للحدودية من الدرجة n بالمتحول z هو:

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$$

حيث $a_0, a_1, .a_n$ ثوابت مركبة من C

يمكن التعويض بـ $Z = re^{i\theta}$ فنجد: $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{i\theta k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k r^k (Cos n\theta + i\, Sin\, n\theta) = \sum_{k=0}^{n} U_k + iV_k$$

حيث:

$$U_k = a_k r^k Cos\, k\theta$$

$$V_k = a_k r^k\ Sin\, k\theta$$

نلاحظ أن U_n و V_n يحققان شروط كوشي ريمن في الإحداثيات القطبية

أي:

$$\frac{\partial u_n}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v_n}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_n}{\partial r}$$

والدالة تحليلية دوماً.

2 . الدالة الجبرية الكسرية البسيطة :

بفرض $W = f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ حيث $g(z)$ و $h(z)$ حدوديتان للمتحول z

ليس بينهما عوامل مشتركة ودرجة البسط أقل من درجة المقام بدرجة على الأقل.إن هذا الدالة تحليلية في كل المستوي فيما عدا النقاط التي تقدم المقام $h(z)$ (فهي نقاط شاذة لهذه الدالة) .

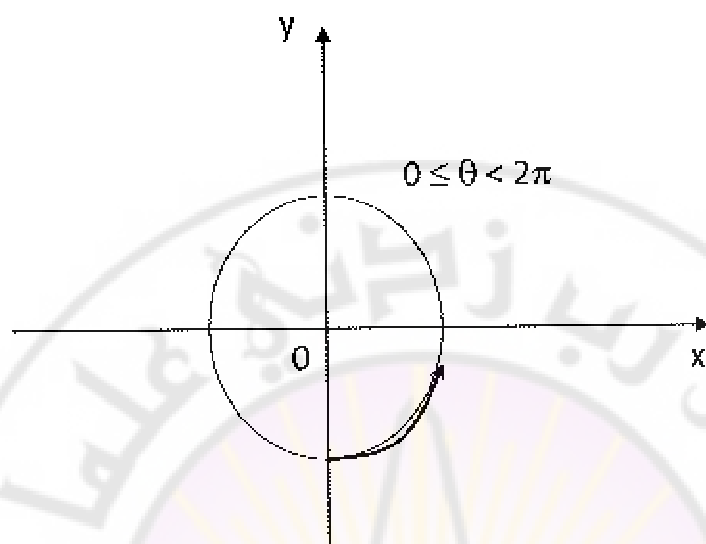
3 . الدالة الجذرية البسيطة والعامة :

بفرض $W = f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ نسمي هذه الدالة بالدالة الجذرية البسيطة ونفرض إنها تمثل الفرع الأساسي:

فإذا كان $Z = re^{i\theta}$ فإن $Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$

أما إذا كان: $Z = re^{i\,(\theta + 2\pi k)}$ فإن $W = f(z) = r^{\frac{1}{n}}.e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}$

إن هذا الفرع يبقى وحيد التعيين طالما كانت زاويته θ تحقق: $0 \le \theta < 2\pi$. وهذا يعني هندسياً أن هناك حاجزاً لا يسمح لنصف القطر الشعاعي الذي يمثل z بالدوران حول o دوره كاملة ، وكأن هذا الحاجز هو المحور ox كما في الشكل ، نسمي هذا الحاجز مستقيم التفرع والنقطة o هذه (التي تتفرع قيم الدالة فيما لو تجولنا حولها) بنقطة التفرع وهي تنتج عن وضع $Z = 0$.



والفرع الرئيسي هو: $W = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (Cos\frac{\theta}{n} + iSin\frac{\theta}{n})$

وهو كما نلاحظ يحقق شرط كوشي ريمن القطبية:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1}\ Cos\frac{\theta}{n} \quad ; \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} Sin\frac{\theta}{n}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1}\ Cos\frac{\theta}{n} \quad ; \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} Cos\frac{\theta}{n}$$

وهذه الدوال موجودة وبالتالي الدالة تحليلية لأنها تحقق.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial u}{\partial r}$$

فالدالـة الجذريـة البسـيطة دالـة تحليليـة علـى المستوي بعـد حـذف ox الموجب (مع المبدأ O).

أما دالة الجذر العام $W = f(z) = [g(z)]^{\frac{1}{n}}$

فتنـتج مسـتقيمات التفـرع مـن وضـع $g(z) = 0$ وبالتـالي تكـون تحليليـة على كل المستوي فيما عدا مستقيمات التفرع مثل الدالة :

$$W = \left[\frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

التي تحوي النقطتان $Z = \pm i$ شاذتان وتفرع و $Z = \pm 1$ نقطتا تفرع.

4. الدالة اللغارتمية البسيطة والعامة :

بفرض $Z = re^{i(\theta+2\pi k)}$ نعرف الدالة اللغارتمية البسيطة كما يلي:

$$W = \ln z = \ln re^{i(\theta+2\pi k)}$$

$$W = \ln r + i(\theta + 2\pi k)$$

نلاحظ أن هذه الدالة متعددة القيم وفرعها الرئيسي: $W = \ln r + i\theta$

ولهذا يلزم أن تكون $0<\theta<2\pi$ أي هناك أيضاً بنفس طريقة المناقشة في الفقرة السابقة نقطة تفرع هي $z=0$، وهناك مستقيم تفرع ينطلق من 0 إلى ∞ وليكن ox ونلاحظ أن الفرع الرئيسي يحقق شروط كوشي ريمن:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}=1$$

أي:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

أما الدالة اللغارتمية العامة فلها الشكل:

$$W=f(z)=\ln g(z)$$

وهي تحليلية في المستوي أينما كان $g(z)$ تحليلية وبعد حذف مستقيمات التفرع الناتجة عن وضع $g(z)=0$،وإذا كان $g(z)$ كسراً عندها:

$$g(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

أي:

$$W=\ln g(z)=\ln f_1(z)-\ln f_2(z)$$

وعندها تنتج مستقيمات التفرع من وضع $f_2(z)=f_1(z)=0$

5 . الدالة الأسية والدالة الأسية العامة:

نعرف الدالة الأسية البسيطة كما يلي:

$$W = f(z) = e^z = e^{x+iy}$$

$$= e^x . e^{iy} = e^x (Cosy + iSiny)$$

$$= e^x Cosy + ie^x Siny$$

وضوحاً هذه الدالة دورية دورها 2π وهي أيضاً تحليلية دوماً، أما الدالة الأسية العامة فهي $W = e^{g(z)}$ تحليلية أينما كانت $g(z)$ تحليلية .

6 . الدوال الدائرية والدوال القطعية:

تعرف هذه الدوال بواسطة الدوال الأسية أي:

$$Sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \forall Z$$

$$Cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \forall Z$$

$$tgz = \frac{Sinz}{Cosz} \qquad Cosz \neq 0, \quad z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

يمكن تعريف مقلوب الدوال السابقة أي $Cos(z)$ ، $Sec(z)$ و $ctg(z)$

أما الدوال القطعية فتعرفها كما يلي:

$$Sh(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad \forall Z$$

$$Ch(z)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \forall Z$$

$$th(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} \qquad e^{2z}\neq -1$$

كما يمكن تعريف المقلوب لكل من هذه الدوال أي:

$$CosShz \quad , \quad Sechz, \quad ,Cothz$$

وتنطبق على هذه الدوال جميعها (السابقة) كل العلاقات المعروفة عليها في الساحة الحقيقية كما أننا نجد بسهولة العلاقات التالية:

نتيجة : $Cosiz = Chz \qquad Siniz = iShz$

$$Chiz = Cosz \qquad Shiz = iSinz$$

7 . الدوال الدائرية والقطعية العكسية:

يمكن تعريفها أيضاً اعتماداً على الدوال اللغارتمية ونحصل لكل منها على مستقيمي تفرع وهي:

$$W = Sin^{-1}z = arcSinz = \frac{1}{i}\ln\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \quad z = \pm 1$$

$$W = \cos^{-1}z = arcCosz = \frac{1}{i}\ln\left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right] \quad z \neq \pm 1$$

$$W = tg^{-1}z = arcTgz = \frac{1}{2i}\ln\left[\frac{1+iz}{1-iz}\right] \quad z \neq \pm i$$

$$W = Sh^{-1}z = \arg Shz = \ln\left[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right] \quad z \neq \pm i$$

$$W = Ch^{-1}z = \arg Chz = \ln\left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right] \quad z \neq \pm 1$$

$$W = Th^{-1}z = \arg Thz = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right] \quad z \neq \pm 1$$

8 . الدالة الكسرية ذات البسط والمقام التحليليين:

هي دالة تحليلية في المستوى Z باستثناء النقاط التي تقوم المقام أما إذا انعدم البسط والمقام فإننا نطبق أوبيتال للتأكد من بقاء الشذوذ.

تمارين محلولة (2) Solved Problems

مثال 11

أوجد الدالة المشتقة للدوال التالية:

1. $W_1 = \dfrac{3z-1}{z^2-z+1}$
2. $W_2 = \ln(z^2-3z+1)$
3. $W_3 = \left(\dfrac{z+2}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}}$
4. $W_4 = \dfrac{Cosz}{z^2}$
5. $W_5 = Th^{-1}3z$

الحـل: (1) الدالـة $W_1 = \dfrac{3z-1}{z^2-z+1}$ كسرية جبرية بسيطة لها نقطتـان شاذتان هما:

$$Z_1 = \frac{1+\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{1-\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

ومشتقتها:

$$W'_1 = \frac{3(z^2-z+1)-(2z-1)(3z-1)}{(z^2-z+1)^2}$$

$$W' = \frac{-3z^2+2z+2}{(z^2-z+1)^2}$$

(2) الدالة $W_2 = \ln(z^2 - 3z + 1)$ دالة لغارتمية نقاطها الشاذة هي نقاط تفرع تتعين من: $z^2 - 3z + 1 = 0$

$$Z_1 = \frac{3 + \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

ومشتقها: $$W'_2 = \frac{2z-3}{z^2 - 3z + 1}$$

(3) الدالة $W_3 = \left(\frac{z+2}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}}$ دالة كسرية جذرية لها هي نقاط التفرع التالية:

$$z + 2 = 0 \qquad z = -2$$

$$z + 1 = 0 \qquad z = -1$$

والدالة المشتقة هي: $$W'_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{z+2}{z+1}\right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{z+1-z-2}{(z+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{-1}{(z+1)^2}\left(\frac{z+2}{z+1}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$W'_3 = -\frac{(z+2)^{-\frac{3}{4}}}{(z+1)^{\frac{5}{4}}}$$

(4) الدالة $W_4 = \frac{Cosz}{z^2}$ دالة كسرية جبرية بسيطة فيها $z = 0$ نقطة شاذة.

$$W'_4 = \frac{-z^2 Sinz - 2zCosz}{z^4}$$

$$W'_4 = \frac{-zSinz - 2Cosz}{z^3}$$

(5) الدالة $W_5 = Th^{-1}3z$ دالة قطعية معاكسة نبدل كل 3z بـ z.

$$W_5 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+3z}{1-3z}$$

النقاط الشاذة (تفرع) $z = \pm 3$ والمشتقة هي :

$$W'_5 = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1+3z}{1-3z}\right)'}{\frac{1+3z}{1-3z}}$$

$$W'_5 = \frac{1}{2}\frac{\frac{3(1-3z)+z(1+3z)}{(1-3z)^2}}{\frac{1+3z}{1-3z}}$$

$$W'_5 = \frac{1}{2}\frac{6+0}{(1+3z)(1-3z)} = \frac{1}{2}\frac{6}{1-9z^2}$$

مثال 12

برهن أن $Chz = u + iv$ تحليلية دوماً واستنتج أن كلاً من v,u توافقيتان:

$$Chz = ch(z + iy) = ChxChiy + ShxShiy$$

$$= ChxCosy + iShxSiny$$

$$U = Chx\ Cosy \qquad V = Shx\ Siny$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = ShxCosy = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -SinyChx = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

الدالة تحليلية لتحقق شروط كوشي ريمن. إن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{وكذلك} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

أي كلاً من v,u توافقيان.

مثال 13

بفرض $r \neq 0$ برهن أن الدالتين الحقيقيتين:

$$U = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \qquad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)Sin\theta$$

همـا الجــزءان الحقيقــي والتخيلــي للدالــة المركبـة التحليليـة دومـاً $f(z)=f(re^{i\theta})=u+iv$ ، ثم أوجد $f(z)$.

الحل : بالاشتقاق الجزئي نجد أن :

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\left(1+\frac{1}{r^2}\right)Sin\,\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\left(r-\frac{1}{r}\right)Cos\,\theta$$

نلاحظ أن:
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

فهما تحققان شروط كوشي ريمن ولهذا تكون الدالة : $f(re^{i\theta})=u+iv$ تحليلية ، و لتعين $f(z)$ يكفي استبدال $r=z\,,\theta=0$ فنجد:

$$f(z)=\left[\left(r+\frac{i}{r}\right)Cos\,\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)Sin\,\theta\right]$$

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

مثال 14

برهن أن الدالتين التاليتين ليستا تحليليتين :

أ) $W_1 = Cosy - iSiny$ ب) $W_2 = x^2 - iy^2$

الحل: (أ) نلاحظ $u = Cosy$ $v = Siny$

$\frac{du}{dr} = 0 \neq \frac{dv}{dy} = -Cosy$ الدالة ليست تحليلية

(ب) نلاحظ $v = -y^2$ $u = x^2$ و أن : $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

ثئئ $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial 0}{\partial y} = -2y$

الدالة ليست تحليلية

مثال 15 برهن أن الدالتين التاليتين ليستا تحليليتين:

أ) $W_1 = \bar{z}$ ب) $W_2 = |z|$

الحـــل: (أ) نلاحـــظ $u = -y$ $v = x$ ومنـــه $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$

فالدالة ليست تحليلية في أية نقطة من المستوي المركب Z .

ب) نلاحظ $v=0$ $\quad u=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

الدالة ليست تحليلية في أية نقطة من المستوي المركب Z

نتيجة هامة : كل دالة مركبة تحوي في طيا تها دالة المرافقة $f(z)=\bar{z}$ أو دالة الطويلة $f(z)=|z|$ ليست تحليلية أبداً(ليست تحليلية في أية نقطة من المستوي المركب Z وذلك لأنها لاتحقق شرطي كوشي ريمن في أية نقطة من المستوي المركب .

مثال 16 بفرض أن $f(z)$ تحليلية برهن أن الدالتين التاليتين ليستا تحليليتين: أ) $W_1=\bar{z}\pm f(z)$ ب) $W_2=|z|\pm f(z)$

الحل: أ) اعتماداً على النتيجة السابقة نجد أن الدالتين التاليتين ليستا تحليليتين .

مثال 17 أوجد جذور المعادلات التالية:

أ) $e^{4z}=1$ $\quad$ ب) $e^{6z}=i$

$Shz = i$ (د) $Chz = i$ (ج)

الحل: (أ) $e^{4z} = 1 = e^{i2\pi k} \Rightarrow$

$$z = \frac{\pi k i}{2}\ ,\ k = 0,1,2.3$$

(ب) $e^{6z} = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$ ومنه $6z = i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$

$$z = \frac{i}{6}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right):\quad k = 0,1,2.3,4,5$$

(ج) $Chz = i = \frac{e^{(z)}+e^{-(z)}}{2}$ ومنه $e^{z}+e^{-z} = 2i$

$e^{2z} - 2i\,e^{z} + 1 = 0$ أي $\Delta = (-2i)^2 - 4(1)(1) = -8$

$$e^{z} = \frac{2i+2i\sqrt{2}}{2} = i(1+\sqrt{2})$$

$$z = \ln i + \ln(1+\sqrt{2})$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

$$e^{z} = \frac{2i-2i\sqrt{2}}{2} = i(1-\sqrt{2})$$

$$e^{z} = i(1-\sqrt{2})$$

$$z = \ln(1-\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

د) $Shz = i = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ ومنه $e^z - e^{-z} = 2i$

$$e^{2z} - 2ie^z - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(1)(-1) = 0$$

أي $e^z = \dfrac{2i}{2} = i$ $\quad z = \ln i = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

مثال 18 أوجد الدالة التحليلية دوماً $f(z)$ والمحقق للشرطين التاليين:

$$\mathrm{Re}\left[f'(z)\right] = 3x^2 - 4y - 3y^2$$

$$f(1+i) = 0$$

الحل: لدينا $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ القسم الحقيقي للمشتقة هو $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 4y - 3y^2$$

$$U(x,y) = x^3 - 4xy - 3^2x + C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 6xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 4y - 3y^2$$

$$v(x,y)=3x^2y-2y^2-y^3+\psi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+\psi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$6xy+\psi'(x)=4x+6xy$$

$$\psi'(x)=4x \qquad \psi(x)=2x^2+C$$

$$V=3x^2y-2y^2-y^3+2x^2+C$$

$$f(x,y)=u+iv=x^3-4xy-3y^2x+C_1$$

$$+i(3x^2y-2y^2-y^3+2x^2+C_1$$

لإيجاد $f(z)$ نضع $x=z$ و $y=0$

$$f(z)=z^3+i2z^2+iC$$

لإيجاد الثابت نعوض $f(1+i)=0$

أي : $f(1+i)=(1+i)^3+2i(1+i)^2+iC_b+C_1$

$$C_1=6 \qquad C=-2$$

$$f(z)=z^3+2iz^2+6-2i$$

مثال 19 برهن على صحة مابلي $|b|<1$

أ . $1+b\cos\theta+b^2\cos 2\theta+\ldots=\frac{1}{1-2b\cos\theta+b^2}$

ب . $b\sin\theta+b^2\sin 2\theta+\ldots=\frac{b\sin\theta}{1-2\cos\theta+b^2}$

بفرض $z=be^{i\theta}$ وبفرض $|z|=|b|<1$ يكون :

$$1+be^{i\theta}+b^2e^{2i\theta}+\ldots=\frac{1}{1-be^{i\theta}}$$

لأن المجموع هو سلسلة هندسية أساسها $be^{i\theta}$ حيث $|be^{i\theta}|<1$

أي: $(1+b\cos\theta+b^2\cos 2\theta+\ldots)+i(b\sin\theta+b^2\sin 2\theta+\ldots)=$

$$\frac{1}{1-be^{i\theta}}=\frac{1}{1-be^{i\theta}}\cdot\frac{1-be^{-i\theta}}{1-be^{-i\theta}}=\frac{1-b(\cos\theta-i\sin\theta)}{1-b(e^{i\theta}-be^{i\theta})+b^2}$$

$$=\frac{1-b\cos\theta+ib\sin\theta}{1-2b\cos\theta+b^2}$$

$$=\frac{1-b\cos\theta}{1-2b\cos+b^2}+i\,\frac{b\sin\theta}{1-2b\cos\theta+b^2}$$

بمطابقة القسمين الحقيقي والتخيلي بين الطرفين نحصل على المطلوب.

تمارين إضافية

Supplementary Problems

1 . بفرض $Z_1 = 2+3i$, $Z_2 = 1-i$ أوجد الدالة $W = Z^2$ لهما.

2 . لنعرف نقطة التفرع لدالة $f(z)$ كما يلي:

نقول عن Z_0 إنها نقطة تفرع للدالة $W = f(z)$ عندما يتحقق مايلي:

لنحيط Z_0 بمنحنى مغلق وإذا تجولنا حول Z_0 على المنحني وغير الدالة $W = f(z)$ قيمة نسمي Z_0 نقطة تفرع.برهن اعتماداً على التعريف أن الدالة $f(z) = \sqrt{z^2+1}$ لها نقطتا تفرع هما $z = \pm i$

3 . كرر نفس السؤال السابق بالنسبة للدالة : $W = f(z) = \ln z$

4 . بفرض $|b| < L$ برهن عندما:

أ . $$1 + bCos\theta + b^2Cos2\theta + ... = \frac{1}{1-2bCos\theta + b^2}$$

ب . $$bSin\theta + b^2Sin2\theta + ... = \frac{bSin\theta}{1-2bCos\theta + b^2}$$

ملاحظة: ☜ انتبه $1 + be^{i\theta} + b^2\ e^{2i\theta} + ... = \dfrac{1}{1-be^{i\theta}}$

5 . احسب $Z = \ln\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

6 . برهن أن: $I_m\left(\frac{1 + itg\frac{\theta}{2}}{1 - itg\frac{\theta}{2}}\right) = Sin\theta$

و برهن أن : $\text{Re}\left(\frac{1 + itg\frac{\theta}{2}}{1 - itg\frac{\theta}{2}}\right) = Cos\theta$

7 . برهن أن الدالة : $U = e^{-x}(x\,Sin\,x - y\,Cosy)$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

8 . عين نوع النقاط الشاذة للدوالتين : $W_2 = \frac{z(z-1)}{(z^2-1)}$, $W_1 = \frac{z}{(z^2+9)^2}$

9 . برهن صحة نظرية كوشي ريمن للدالة التحليلية في الإحداثيات القطبية أي: $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$ ، $r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}$

10 . حل المعادلة اعتماداً على مفهوم الأعداد المركبة المترافقة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = x^2 - y^2$$

11– برهن أن الدالة : $U = e^{x} Cosy)$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

12– برهن أن الدالة : $U = e^{x} \sin y$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

13 ـ برهن أن الدالة : $U = x^{2} - y^{2}$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

14 ـ برهن أن الدالة : $U = 2xy$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

15 ـ برهن أن الدالة : $U = e^{x} Ch\ y$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

16– برهن أن الدالة : $U = 2xy - e^{x} Cosy$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

17– برهن أن الدالة : $U = e^{x} Ch\ y + e^{x} Cosy + x^{2} - y^{2}$ توافقية ، ثم أوجد الدالة v الموافقة لـ u حتى تكون $f(z) = u + iv$ تحليلية .

الفصل الثاني

التكامل المركب COMPLEX INTEGRATION

من أهم موضوعات التحليل الرياضي حساب التفاضل والتكامل ، والتكامل المركب يتم على منحنيات اختيارية في المستوي المركب C بدلاً من قطع مستقيمة فقط من المحور الحقيقي ، فهي تكاملات خطية تعطي نتائج سريعة وممتعة ،كما توجد نظريات تعد من أجمل النظريات في الرياضيات بشكل عام وفي التكامل بشكل خاص .

التكاملات الخطية Line Integrals :

جميع خواص الدوال التحليلية التي درست في الفصل الأول مستنتجة من قابلية الاشتقاق للدالة . وهناك ربط مفيد وفعال بين الاشتقاق و والتكامل المحدود و هذا الربط موضح في النظرية الأساسية التالية :

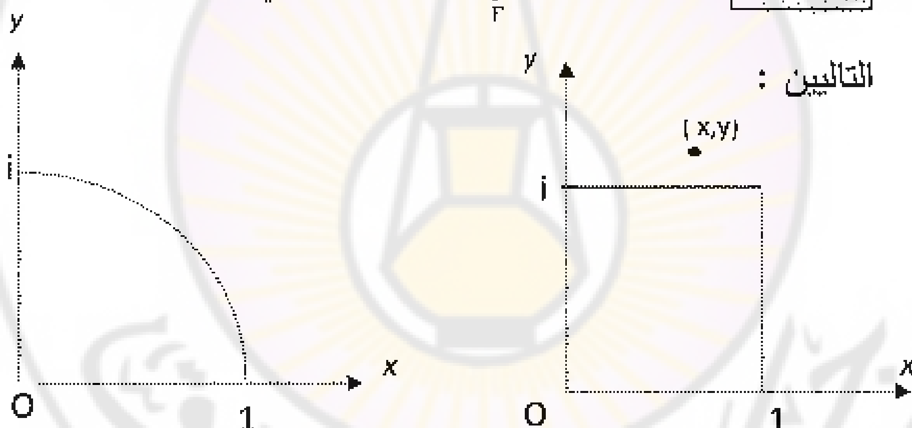
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل :

الحالة الحقيقية : لتكن الدالة $f(x)$ الحقيقية مستمرة على الفترة $[a,b]$ أي أن $a \le x \le b$ فإن للدالة $f(x)$ دالة أصلية على هذه الفترة $F(x)$ أي أن : $F'(x) = f(x)$ فإن : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

الحالة المركبة :

لتكن الدالة المركبة $f(z)$ مستمرة على منطقة G التي تحتوي على منحنٍ أملس جزئياً Γ أي أن $\Gamma: z = z(t): \ a \le t \le b$ ولتكن للدالة $f(z)$ دالة أصلية على هذه الفترة الدالة التحليلية $F(z)$ أي أن : $F'(z) = f(z)$ فإن : $\int_\Gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$ فالتكامل يعتمد فقط على نقطتي النهاية والبداية للمنحني Γ ولايعتمد على المسار.

مثال 21 احسب $\int_\Gamma z^2\, dz$ حيث إن المنحني Γ معطى بأحد الشكلين التاليين :



الحل : الدالة المكاملة $f(z) = z^2$ تحليلية وتكاملها هو $F(z) = \frac{z^3}{3}$

وبالتالي فإن التكامل في كلا الشكلين السابقين لايتعلق بالمسار وإنما يعتمد فقط على نقطتي البداية(1,0) و النهاية (0,i) للمنحني Γ وبالتالي فالتكامل في كلا الحالتين له نفس النتيجة وهي :

$$\int_{\Gamma} z^2\, dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{(1,0)}^{(0,i)} = \frac{1}{3}.(i^3 - 1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

حالة خاصة : إذا كانت $F(b) = F(a)$ فإن : $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

مثال 22 أثبت أن : $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ حيث إن المنحني Γ معطى بالمعادلة التالية : $|z| = 1$

الحل : نكتب المنحني بالشكل الوسيطي $\Gamma: z(t) = e^{it}\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

وبالتالي : $z'(t) = i\ e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$ **وعندئذ يصبح التكامل :**

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)dt}{z(t)} = \int_0^{2\pi} \frac{i\ e^{it}\ dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = = 2\pi i$$

طريقة أخرى للحل : أو باستخدام النظرية الأساسية في حساب التكامل ، نختار أي فرع لسطح ريمان R للدالة التحليلية :

$$F(z) = \log z = \log|z| + i\arg z$$

فلو أخذنا البداية عند النقطة i- على الفرع الأصلية نجد :

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \log|z| + i\arg z\Big|_{e^{-\frac{\pi i}{2}}}^{e^{3\frac{\pi i}{2}}} = 3\frac{\pi i}{2} - (-\frac{\pi i}{2}) = 2\pi i$$

التكامل الخطي العددي:

رأينا في الفصل السابق أن الدالة المركبة تتألف من جزأين $v=(x,y),u=(x,y)$ وهما حقيقيان ، سوف ندرس بعض الدوال المركبة ذات المتحولات المركبة أو الحقيقية مثل:

1. $W_1 f(z) = Shz + z^2 - ichz$

و هي دالة مركبة لمتحول مركب :

2. $W_1 = f(z) = t^2 + t + 1 + i\sin t = u(t) + iv(t)$

و هي دالة مركبة لمتحول حقيقي.

الحالة الأولى : يكون z متحولاً على نطاق في الحالة العامة وهذا النطاق من المستوي المركب .

الحالة الثانية : فإن المتحول t حقيقي و هو يتحول على نطاق حقيقي (مجال حقيقي) ويعرف التكامل في الحالة الثانية على فترة (a,b) كما يلي: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b [u(t)+iv(t)]dt$

وبسهولة نرى أن خواص التكاملات المحددة الأساسية الحقيقية محققة على هذه التكاملات. يعرف التكامل المركب كما يلي:

1. ليكن γ منحنياً مستمراً محدوداً وصقيلاً مستوياً موجهاً أو صقيلاً جزئياً ولنفرض: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

دالة مركبة مستمرة على γ إن التكامل الخطي المركب على γ بالتعريف هو التكامل $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} [u(x,y) + iv(x,y)]d(x+iy)$

$$= \int_{\gamma} udx - vdy + i\int udy + vdx$$

وهي كما نرى مؤلفة من أربعة تكاملات حقيقية وشرط وجود التكامل المركب هو وجود هذه التكاملات. يمكن لهذا المنحني γ أن يكون مفتوحاً أو مغلقاً وسوف نرمز للتكامل المغلق كمايلي: $\oint_{\gamma} f(z)dz$ ونعد الاتجاه الموجه عكس عقارب الساعة موجباً كما نسمي γ مسار هذا التكامل ويلاحظ أن قيمة التكامل مرتبط بالمسار. و قد رأينا سابقاً حالات يكون فيها التكامل مستقل عن المسار.

خواص التكاملات المركبة :

هي نفسها خواص التكاملات الخطية مضافاً لذلك أن المسار لا يمكن أن يمر بأية نقطة شاذة أو يقطع مستقيم تفرع للدالةالمركبة $f(z)$ لأن الدالة غير مستمرة على هذه النقاط، لنذكر بأهم هذه الخواص:

1. $A\int_{\gamma} f(z)dz = A\int_{\gamma_1} f(z)dz + A\int_{\gamma_2} f(z)dz$ حيث $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

2. $\int_{\gamma}[f(z) \pm g(z)]dz = \int_{\gamma} f(z)dz \pm \int_{\gamma} g(z)dz$ حيث $f(z), g(z)$ دالتين مستمرتين على γ

3. تحقق العلاقة $\int_{ab} f(z)dz = -\int_{ba} f(z)dz$

4. $\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le L.M$ حيث L طول المسار و $|f(z)| \le M$ مهما Z

حساب التكاملات المركبة على منحنٍ:

لقد وجدنا أن التكامل المركب $\int_{\gamma} f(z)dz$ عبارة عن مجموع تكاملات حقيقية بمتحولين أو متحول واحد وفي الحالة العامة يمكن حساب هذا التكامل بالاستعانة بمعادلة المنحني γ حيث نستبدل أحد المتحولين x أو y بالآخر بواسطة معادلة المنحني ويتحول التكامل إلى تكامل بمتحول واحد تحدد قيمته من معادلة المنحني المعطى .

مثال 23 احسب التكامل: $I=\int_{\gamma} z^2 dz$ حيث γ الدائرة $|z|=1$

الحل : من الدائرة $|z|=1$ نجد: $0 \le \theta \le 2\pi$ $\quad z=e^{i\theta}$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi} ie^{2i\theta}ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{3i\theta}d\theta = \frac{1}{3i}e^{i3\theta}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{i6\theta}-1}{3i}$$

$$=\frac{Cos6\pi + iSin6\pi - 1}{3i} = 0 \quad \Rightarrow \quad I=0$$

نظرية كوشي التكاملية:

تمهيد: لتكن $\overline{D}$ منطقة بسيطة الاتصال أي يمكنها وصل أي نقطتين من المنطقة $\overline{D}$ بمنحنى مستمر يقع في $\overline{D}$ وليكن Γ منحنياً مستمراً صقيلاً أو صقيلاً جزئياً عند ذلك.

نظرية كوشي التكاملية إذا كان $f(z)$ دالة مركبة تحليلية على المنطقة $\overline{D}$ البسيطة الاتصال والتي يحيط بها المنحني المستمر المغلق والموجه والصقيل أو الصقيل جزئياً فإن:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

الإثبات : سوف نبرهن على هذه النظرية مفترضين أن $f'(z)$ مستمر أيضاً مع إمكانية البرهان عليها دون هذا الشرط (حيث برهن عليها العالم غورسان)

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} [u(x,y) + iv(x,y)]d(x,+iy)$$

$$= \oint_{\Gamma} udx - vdy + i\oint_{\Gamma} udy + vdx$$

وحيث إن أحد أشكال المشتق $f'(z)$ هو :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

نجد أن هذه المشتقات مستمرة لكون $f'(z)$ كذلك لهذا يمكن تطبيق نظرية غرين في المستوي على التكاملين الخطيين الحقيقيين السابقين فنجد:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \iint_{D}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

وحيث إن $f(z)$ دالة تحليلية لهذا فهو يحقق شروط كوشي ريمن أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي فإن كلاً من التكاملين السابقين معدوم أي: $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$

نتيجة: إذا كان Γ_1 منحنياً موجهاً وصقيلاً داخل $\overline{D}$ التي يحدها Γ

عندها: $\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz$

كما يمكن تعميم ذلك على عدة منحنيات $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ واقعة داخل

$\overline{D}$ فنجد: $\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \ldots + \oint_{\Gamma_n} f(z)dz$

من أجل البرهان نصل نقطة من Γ مثل A بنقطة من Γ_1 مثل B فنجد

حسب كوشي: $\oint_{ABcdBAEFA} f(z)dz = 0$

أي: $\int_{AB} fdz + \oint_{BCdB} fdz + \oint_{BA} f(z)dz + \oint_{AEFA} f(z)dz = 0$

لكن $\int_{AB} = -\int_{BA}$ تكاملان متعاكسان

أي: $\int_{BcdB} f(z)dz = -\int_{AEFA} f(z)dz$

$$\int_{BdcB} f(z)dz = \int_{AEFA} f(z)dz$$

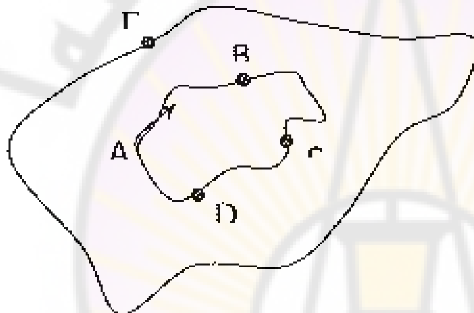
$\oint_{\Gamma_1} fdz = \oint_{\Gamma} f(z)dz$ يمكن برهان التعميم بنفس الطريقة.

استقلال التكامل من الطريق (المسار):

بفرض $f(z)$ دالة تحليلية على $\overline{D}$ التي يحيط بها المنحني المغلق Γ. لنفرض أن $ABCDA = \Gamma_1$ منحنٍ آخر يقع بكامله في $\overline{D}$ عندها:

$$\int_{ABC} f(z)dz = F(C) - F(A)$$

حيث $f(z)$ الدالة الأصلية لـ $f(z)$ و حسب نظرية كوشي ونتيجتها السابقة فإن Γ, Γ_1 متكافئان أي:



$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = 0$$

$$\oint_{\Gamma_1} fdz = \int_{ABCDA} f(z)dz = 0$$

$$\int_{ABC} f(z)dz + \int_{CDA} f(z)dz = 0$$

$$\int_{ABC} f(z)dz = -\int_{CDA} f(z)dz = \int_{ADC} f(z)dz$$

أي التكامل لا يتعلق بالمسار بل بقيمة الدالة في A وقيمته في C.

صيغ كوشي التكاملية Cauchy's Theorem and formulas

مبرهنة

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على $\bar{D}$ التي يحيط بها Γ الموجه والمغلق والمستمر وكانت a نقطة داخلية من $\bar{D}$ عندها تصح العلاقتان التاليتان:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

البرهان: إن الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ غير تحليلية عند $z=a$ لهذا نحيط a بجوار نصف قطره ε بحيث Γ_1 $|z-a|=\varepsilon \Rightarrow z-a=\varepsilon e^{i\theta}$

$z=a+\varepsilon e^{i\theta}$ ومنه $dz=i\,e^{i\theta}\,d\theta$

إن الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية، على $\bar{D}_1$ حيث $\bar{D}_1$ المنطقة بين Γ_1,Γ

وبالتالي: $\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z-a}dz$

إن Γ,Γ_1 متكافئان لكن: $\oint_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$

$$= i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

لنأخذ نهاية الطرفين عندما $\varepsilon \to 0$ أي المنطقة $\overline{D_1}$ تنتهي إلى D عندها:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f\left[\lim_{\varepsilon\to 0}(a+\varepsilon e^{i\theta})\right]d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)d\theta = 2\pi i f(a)$$

ومنه:
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

بما أن النقطة $z=a$ داخلية اختيارية في D لهذا يمكن اعتبارها متحولة والاشتقاق بالنسبة لـ a فنجد:
$$f'(a) = \oint_\Gamma \frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

لأن z ثابت بالنسبة لـ a نكرر ذلك لنجد أن:

$$f''(a) = \frac{2}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$$

$$f'''(a) = \frac{3i2}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{3+i}}\,dz$$

$$f^{(4)}(a) = \frac{4.3.2.1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{4+1}}\,dz$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$ وهو المطلوب .

تمارين (3) محلولة

Solved Problems

مثال 24

احسب التكامل $I=\int_{\Gamma} z^3 dz$ حيث Γ قوس من القطع المكافئ $y=2x^2$

والذي يصل بين النقطتين $O(0,0)$, $B(1,2)$

الحل:

الدالة المستكملة تحليلية لهذا لا يتعلق التكامل بالمسار ويمكن كتابة:

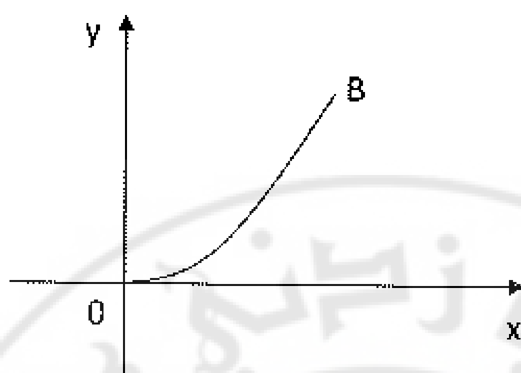
$$I=\int_{OB} z^3 dz=\frac{z^4}{4}\Big|_0^B=\frac{(1+2i)^4}{4}=-\frac{7}{4}-6i$$

يمكن حل المسألة السابقة بالاستعانة بمعادلة المنحني $y=2x^2$

نستبدل $z=x+iy$ ثم نكتب: $z=x+2x^2 i$, $dz=dx+idy$

ونحول التكامل المركب إلى تكاملات حقيقية آخذين بالحسبان تحول x

من 0 إلى 1 نحصل على نفس النتيجة السابقة.



مثال 25 احسب التكامل $I=\int_\Gamma z^2 dz$ حيث Γ المنحني الوسيطي

$y=t^2, x=t$ و $0\le t\le 2$ و $z=x+iy$ أي

$$z=t+it^2 \Rightarrow dz=(1+2it)dt$$

الحل :

$$I=\int_0^2 (t+it^2)(1+2it)dt=\int_0^2 (t^2-t^4+2it^3)(1+2it)dt$$

$$=\int_0^2 (t^2-t^4+2it^3-2it^5-4t^4)dt$$

$$=\int_0^2 (t^2-t^4-4t^4)dt+i\int_0^2(4t^3-t^5)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{5}{6}t^5+it^4-i\frac{t^6}{6}\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{160}{6}+i(16)-i\left(\frac{64}{4}\right)=-\frac{72}{3}-\frac{72}{6}i=-24-12i$$

مثال 26 ليكن Γ مربعاً موجهاً عكس عقارب الساعة رؤوسه هي النقاط $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ احسب قيمة التكاملات.

أ. $\oint_{\Gamma} |z^2|\, dz$ ب. $\int_{\Gamma} chz\, dz$

الحل: أ. إن التكامل هو التالي: $I = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2)(dx + idy)$

$$= \int_{\Gamma} x^2 dx - y^2 dy + i \int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$$

يجب التمييز على كل ضلع من أضلاع المربع قيمة z فنجد على القطعة OA: $OA \to z = x \quad dx = dz \quad 0 = x \to x = 2$

على AB : $AB \to z = 2 + iy \quad 0 \le y \le 2$

و على BC: $BC \to z = x + 2i \quad x = 2 \to x = 0$

أما على CO: $CO \to z = iy \quad 2 = y \to y = 0$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$I_{AB} = \int_0^2 (4-y^2)(idy) = i\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

$$= i\left(8 - \frac{8}{3}\right) = i\frac{16}{3}$$

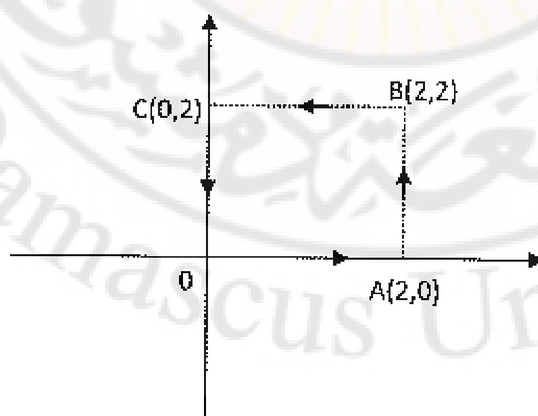
$$I_{BC} = \int_2^0 (x^2+4)(dx) = \frac{x^3}{3} + 4x\Big|_2^0 = -\frac{8}{3} - 8 = -\frac{32}{3}$$

$$I_{CO} = \int_2^0 iy^2 dy = i\frac{y^3}{3}\Big|_2^0 = -\frac{8}{3}i$$

$$I = I_{OA} + I_{AB} + I_{BC} + I_{CO}$$

$$= \frac{8}{3} + i\frac{16}{3} - \frac{32}{3} - \frac{8}{3}i = -8 + \frac{8}{3}i$$

ب . الدالةالمستكملة تحليلية على المنحني السابق Γ : $I = \int_\Gamma Chz dz = 0$



مثال 27

احسب قيمة التكاملات التالية: $I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{Sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz$

. $I_2 = \oint_{|z|=1} \frac{Cos^4 z}{z-\frac{\pi}{6}} dz$ $\quad I_3 = \oint_{|z+1-i|} \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$

الحل: من ملاحظة صيغة كوشي الثانية: $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$

وبالموازنة نجد: $n+1=2 \quad n=1 \quad f(z)=Sin2z$

$$a=\frac{\pi}{2} \in |z|<2$$

لهذا نطبق هذه الصيغة فنجد:

$$\oint_{|z|=2} \frac{Sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) = 2\pi i[Sin2z]^1$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{Sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} dz = 2\pi i\left(2Cos2\frac{\pi}{2}\right) = -4\pi i$$

بمقارنة صيغة كوشي الأولى: $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$

نجد: $n+1=1 \quad n=0$

$$f(z)=\cos^4 z \qquad a=\frac{\pi}{6}\in|z|<1$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{Cos^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)}dz=2\pi i\left(Cos^4 z\right)_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$=2\pi i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{9\pi}{8}i$$

3 . بالنظر لصيغ كوشي مباشرة نجد عدم وجود تشابه لأن المقام من الدرجة الثانية (حدودية من الدرجة الثانية) أما المنطقة فهي الدائرة.

$$|z-(-1+i)|=2$$

ذات المركز $(-1+i)$ ونصف القطر 2.

ثم نفرق الكسر حتى تتطبق صيغ كوشي أو نتبع مايلي:

$$z^2+2z+5=0$$

$$\Delta=4-4(5)=-16$$

$$z_1=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i \quad z_2=-1+2i$$

نلاحظ أن z_1 تقع خارج الدائرة $|z-(-1+i)|=2$ لهذا نكتب التكامل :

$$I_3 = \int_{|z-(-1+i)|=2} \frac{\left(\frac{z+4}{z-z_1}\right)dz}{z-z_2}$$

بالموازنة مع صيغة كوشي الأولى نجد:

$$f(z) = \frac{z+4}{z-z_1} = \frac{z+4}{z+1+2i}$$

$$n+1=1 \qquad n=0$$

$$a = z_2 = -1+2i$$

$$I_3 = 2\pi i\left(\frac{z2+4}{z2+1+2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{-1+2i+4}{-1+2i+1+2i}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3+2i}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}(3+2i)$$

احسب التكامل $I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ حيث Γ القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ والموجه عكس عقارب الساعة.

الحل : إن النقطة الشاذة الوحيدة الواقعة داخل القطع هي $z=0$ لهذا تكون التكاملات على كل المنحنيات الحاوية لـ $z=0$ والواقعة داخل القطع متكافئة لهذا نختار Γ_1 دائرة مركزها 0 ونصف قطرها اختياري

بحيث تقع داخل Γ ولهذا يكون الدالة $\frac{1}{z}$ تحليلية على المنطقة الواقعة

بين Γ_1, Γ وهما بالتالي منحنيان متكافئان.

$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} dz = 2\pi i(1) = 2\pi i$ حسب صيغة كوشي.

مثال 30

احسب التكامل: $I = \int_{\Gamma} \frac{9z^2 - iz + 4}{z(z^2+4)} dz$ حيث $\Gamma : |z| = 4$

الحل : نلاحظ عدم امكانية تطبيق صيغ كوشي مباشرة لهذا نعمد إلى

تفريق الكسر فنجد: $\frac{9z^2 - iz + 4}{z(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{z} + \frac{\frac{37}{4}}{z+2i} + \frac{\frac{15}{2}}{z-2i}$

$$I = \int_{|z|=4} \frac{dz}{z} + \frac{17}{4} \int_{|z|=4} \frac{dz}{z+2i} + \frac{15}{2} \int_{|z|=4} \frac{dz}{z-2i}$$

وحسب صيغ كوشي التكاملية نجد: $= 2\pi i(1) + \frac{17}{4}(2\pi i)(1) + \frac{15}{2}(2\pi i)(1)$

$$= 2\pi i\left[1 + \frac{17}{4} + \frac{15*2}{4}\right]$$

$$= 2\pi i \frac{(51)}{4} = \frac{51}{2}\pi i$$

تمارين (3) إضافية

1 . ليكن $W = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ دالة مركبة عين مشتقة هذه الدالة $\frac{dw}{dz}$

وحدد أين تكون هذه الدالة غير تحليلية.

2. تحقق من صحة كوشي في الدوال التحليلية من أجل الدالة $f(z) = e^z$

والمنطقة $|z| = 1$

3. إذا كان $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ منحنياً Γ يصل النقطتين

$B(2,3), A(1,1)$ احسب التكامل: $\int_\Gamma (12z^2 - 41z)\, dz$

4.احسب التكامل : $I_1 = \int Cot(2z+5)dz$

5. احسب التكامل : $I_2 = \int Sin\,3z Cos\,3z\, dz$ ،

6ـ حقل قوة مغناطيسية $\vec{F} = 3z + 5$ أوجد عمل هذه القوة من أجل الانتقال لجسم ما في هذا الحقل عندما ينتقل من النقطة الموافقة لـ $z = 0$ إلى $z = 4 + 2i$ على منحني Γ حيث $\Gamma : z = t^2 + it$ الجواب: 50.

7. احسب التكامل: $I = \oint_\Gamma (x+2y)dx + (y-2x)dy$ حيث Γ المنحني

المعرف بـ $x = 4\cos\theta, y = 3Sin\theta$ و حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ الدوران عكس عقارب الساعة.

8. احسب التكامل $I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z)dz$ حيث Γ هو المنحني $|z| = 2$ من النقطة $A(2,0)$ إلى النقطة $B(0,2)$.

9.. احسب التكامل:

$$I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z)dz \quad \Gamma : x = a(\theta - Sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

من النقطة الموافقة لـ $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$

الجواب: $\dfrac{6\pi^5 a^5 + 80\pi^3 a^3 + 30\pi a}{15}$

10. احسب التكامل: $I = \oint_{\Gamma} \dfrac{dz}{z - 2}$

حيث $\Gamma : |z - 2| = 4$ أو $\Gamma : |z - 1| = 5$ الجواب $2\pi i$

11.احسب التكامل $I = \oint_{\Gamma} \dfrac{dz}{z - 3}$ حيث $\Gamma : |z - 2| = 5$

هل النتيجة تعارض نظرية كوشي؟

12. احسب التكامل $I=\oint_{\Gamma} e^{z}dz$ حيث $\Gamma:|z|=1$ ثم برهن أن:

$$I_1=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta+Sin\theta)d\theta=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}Sin(\theta+Sin\theta)d\theta=0$$

13. أوضح بشكل مباشر أن قيمة التكامل: $I=\int_{3+4i}^{4-3i}(6z^2+8iz)\,dz$

لا تتغير على المنحني Γ الذي يصل النقطة $3+4i$ بالنقطة $4-3i$ في حال كون Γ هو: أ. المستقيم الواصل بينهما.

ب. أو المستقيم الواصل من $3+4i$ إلى $4+4i$

ثم من $4+4i$ إلى $4-3i$ ج. الدائرة $|z|=5$

احسب هذه القيمة؟ الجواب: $238-266i$

14. احسب التكامل: $I=\oint_{\Gamma}\frac{Sin\pi z^2+Cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$

حيث $\Gamma:|z|=3$ الجواب: $4\pi i$

15. احسب التكامل: $\Gamma:|z|=3$ $I=\oint_{\Gamma}\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ الجواب: $\frac{8\pi i e^{-2}}{3}$

16. احسب التكاملات الآتية:

1. $I_1=\oint\limits_{\Gamma}\frac{Sin3z}{z+z}dz$ حيث Γ هو $|z|=5$

2. $I_2=\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2+1}dz$ حيث t وسيط.

17. لنفرض أن لدينا $P(z)$ أية كثيرة حدود و المنحني Γ أملس جزئياً

أثبت أن : 1. $\int\limits_{\Gamma}P(z)dz=0$ إذا كان منحنياً مغلقاً .

2. $\int\limits_{\Gamma}P(z)dz=0$ **إذا كان منحنياً** يعتمد فقط على نقطتي البداية

(1,0) و النهاية **(-1,0)** .

18. إذا كان Γ منحني القطع المكافئ $y=x^2$ من نقطة البداية

(0,0) و النهاية **(1,1)** **أثبت أن :**

$$I=\int\limits_{\Gamma}(3z^2+\sin z)\,dz=-1-\cos 1.ch1+i(2+\sin 1 sh1)$$

19. **أثبت أن** $I=\int\limits_{\Gamma}(3\bar{z}+1)\,dz=1+5i$ **إذا كان** Γ منحني

القطع المكافئ $y=x^2-1$ من نقطة البداية (0,-1) و النهاية **(1,0)**

20. **أثبت أن :** $I=\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z}=-\ln(i)=-\frac{\pi}{2}i$ **إذا كان** Γ منحني القطع

المكافئ $y=x^2+1$ من نقطة البداية (0, 1) و النهاية **(1,0)** .

21. أثبت (اعتماداً على مبرهنة كوشي)أن :

$$I = \oint_{\Gamma} (e^{z^2} + \cos z + z^2)\, dz = 0$$ حيث Γ المنحني المغلق

المحدد بالحالات التالية :

1. $|z| = 5$
2. $|z+i| = 1$
3. $|z-1| = 1$
4. $|z-1+i| = 1$

22. أثبت (اعتماداً على مبرهنة صيغ كوشي التكاملية)أن :

$$I = \oint_{\Gamma} f(z)\, dz$$ حيث Γ المنحني المغلق المحدد بالحالة

التالية : $|z-1| = 1$ يحقق مايلي:

1. $I = \pi i \, , \quad f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$
2. $I = 0 \, , \quad f(z) = \dfrac{z+1}{z(z+5)^2}$
3. $I = 2\pi i \, , \quad f(z) = \dfrac{1}{\sin(z-1)}$

4. $f(z) = \frac{1}{\sin z} \quad , \quad I = 0$

23. أثبت (اعتماداً على التحويل القطبي)أن :

$$I = \oint_{\Gamma} (\bar{z} + 5) \; dz = 8\pi i$$

حيث Γ المنحني المغلق : $\Gamma : |z| = 2$

الفصل الثالث

السلاسل المركبة وسلاسل تايلور ولورانت

Infinite Complex Series and Taylor's and Lauren't's Series

مقدمة :

نعلم من دراستنا للتحليل الحقيقي أن أي تطبيق لمجموعة من الأعداد الطبيعية على مجموعة أخرى يسمى متتالية ، كذلك الأمر هنا في الساحة المركبة فإن أي تطبيق لمجموعة من الأعداد الطبيعية على مجموعة مركبة يسمى متتالية مركبة حيث نكتب :

$$\{Z_n\} = Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$$

وهي متتالية غير منتهية وكل عدد منها يسمى حداً للمتتالية نسمي Z_n الحد العام .

مثال : المتتالية: $\left\{1+\frac{i}{n}\right\} = 1+i+\,,\,1+\frac{i}{2}\,,\,1+\frac{i}{3},\ldots,1+\frac{i}{n},\ldots$

حيث $1+\frac{i}{n}$ الحد العام للمتتالية. إذا وضعنا $Z_n = x_n + i\,y_n$ نجد أن دراسة المتتالية $\{Z_n\}$ تؤول على دراسة المتتالية $\{X_n\}$ والمتتالية $\{Y_n\}$.

تعريف 1 نقول إن $\{Z_n\}$ متقاربة من Z_0 إذا تحقق؛

$$\forall \quad \varepsilon > 0, \quad \exists \quad N(\varepsilon): \ |Z_n - Z_0| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

مبرهنة 1

بسهولة ومن خلال التعريف 1 نجد أن الشرط اللازم والكافي لتكون $\{Zn\}$ حيث $Z_n = x_n + iy_n$ متقاربة من $Z_0 = x_0 + iy_0$ هو أن تحقق :

$$x_n \to x_0 \quad , \quad y_n \to y_0 \quad , n \to \infty$$

تطبيق: المتتالية $Z_n = \frac{3n-1}{2n} + i\frac{n+1}{3n+12}$ متقاربة لأنه عندما $n \to \infty$ فإن:

$$x_n = \frac{3n-1}{2n} + \to \frac{3}{2}$$

$$y_n = \frac{n+1}{3n+12} \to \frac{1}{3}$$

وبالتالي يكون : $Z_n \to \frac{3}{2} + \frac{1}{3}i$

تعريف 2

نقول عن متتالية $\{Z_n\}$ إنها متتالية كوشي إذا كانت تحقق مايلي:

مهما يكن العدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين العدد الصحيح $N(\varepsilon)$ بحيث:

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |Z_{n+p} - Z_n| < \varepsilon$$

حيث p أي عدد طبيعي. ونقول إن المتتالية $\{Z_n\}$ محدودة إذا كان $|Z_n| \le M$ و حيث M عدد حقيقي ثابت.

السلاسل المركبة:

بفرض $\{Z_n\}$ متتالية مركبة حيث $Z_n = x_n + i\,y_n$ عندئذ نسمي سلسلة مركبة المجموع اللانهائي : $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = Z_1 + Z_2 + .. + Z_n + ...$

كما نسمي $S_n = Z_1 + Z_2 + .. + Z_n$ المجموع النوني للسلسلة.

تعريف 3

إذا كانت المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة من S فإننا نقول إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ متقاربة ونكتب تجاوزاً $S = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ أما إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة عندها نقول إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Zn$ متباعدة.

معايير التقارب يمكننا تطبيق معايير التقارب المعروفة في الساحة الحقيقية على السلاسل المركبة فمثلاً تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ حسب معيار كوشي إذا تحقق مايلي:

من أجل أي $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين $N(\varepsilon)$ صحيح.

من أجل أي p طبيعي و $n > N(\varepsilon)$ بحيث يكون $|S_{n+p} - Sn| < \varepsilon$

نحصل على *الشرط اللازم لتقارب* السلاسل (كما في الساحة الحقيقية)

من أجل $p = 1$ $\lim_{n\to\infty} |S_{n+1} - S_n| = \lim_{n\to\infty} Z_n = 0$

ولكن قد ينتهي الحد العام إلى الصفر دون أن تكون السلسلة متقاربة (مثل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{n}$).

التقارب الشرطي و التقارب بالإطلاق

تعريف 4

نقول إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ متقاربة مطلقاً أو بالإطلاق إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n|$ متقاربة

أما إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n|$ متباعدة و $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ متقاربة فإننا نسمي التقارب شرطياً.

نلاحظ أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متقاربة أما $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right|$ فهي متباعدة وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متقاربة شرطياً.

بسهولة نرى أن التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ يكافئ تقارب السلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} | y_n | \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} | x_n |$$ حيث : $Z_n = x_n + i\, y_n$

خواص السلاسل المركبة

من المفيد أن نشير إلى أن الكثير من خواص السلاسل الحقيقية المتقاربة مطلقاً هي صحيحة في الساحة المركبة مثل الحالات التالية:

1 . تغير ترتيب حدود سلسلة متقاربة بالإطلاق لا يغير مجموع السلسلة.

2 . مجموع أو فرق أو مضروب سلسلتين متقاربتين بالإطلاق هو سلسلة متقاربة بالإطلاق.

3 . إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} Un$ متقاربة وكان $|Zn| \le |Un|$ عندها $\sum_{n=1}^{\infty} Zn$ متقاربة بالإطلاق.

مثال30 السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^{2n}}$ متقاربة بالإطلاق ذلك لأن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n}}$ متقاربة ولأن $\left|\frac{i^n}{n^{2n}}\right| < \frac{1}{2n}$

4 . أما إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} Un$ متباعدة وكان $|Zn| > |Un|$ عندها $\sum_{n=1}^{\infty} Zn$ متباعدة وقد تكون $\sum_{n=1}^{\infty} Zn$ متقاربة شرطياً.

5 . اختبار دالامبير :

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Zn$ متقاربة إذا تحقق الشرط: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z^{n+1}}{Z^{n}}\right| < 1$

والحالة المعاكسة متباعدة ، وفي حالة النهاية 1 حالة شك.

مثال31 السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n+3}$ متباعدة.

6 . الاختبار النوني (كوشي):

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Zn$ متقاربة عندما: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|Z_n|} = q < 1$

وعندما $q > 1$ تكون السلسلة متباعدة وعندما $q = 1$ حالة شك.

مثال: السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+4i}{4}\right)^n$ متباعدة.

7 . اختبار راب: تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Zn$ متقاربة مطلقاً عندما يكون :

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left|\frac{Z_n+1}{Z_n}-1\right|\right. < 1$$

سلاسل الدوال المركبة :

عندما تكون حدود السلسلة المركبة دوال لمتحول عقدي Z نسمي السلسلة بسلسلة دالية مثل: $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(z) = W_1(z) + W_2(z) + .. + W_n(z) + ..$

$$S_n(z) = W_1(z) + W_2(z) + .. + W_n(z)$$

نسمي $\{S_n(z)\}$ متتالية المجاميع الجزئية من السلسلة عندها نكتب:

تعريف: نقول عن السلسلة الدالية $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(z)$ متقاربة بانتظام على D إلى الدالة $W(z)$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(z)\}$ متقاربة على D أي من أجل أي $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين $N(\varepsilon) \in N$

$$|S_n(z) - W(z)| < \varepsilon; \quad n > N(\varepsilon), Z \in D$$

اختبار فايرشتراس :

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(z)$ متقاربة بانتظام على D وبشكل مطلق إذا كان: $n = 1,2,3,..$ $|Wm(z)| \le m_n$ حيث m_n أعداد لا تتعلق بالمتحول Z من D وكانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ متقاربة.

ملاحظة: في التقارب بانتظام يمكن اشتقاق وتكامل حدود السلسلة حداً حداً ومن ثم اشتقاق المجموع أو تكامله وإذا كانت حدود السلسلة دوال مستمرة كان مجموعها دالة مستمرة (والتباين ربما يكون في الأطراف).

سلاسل القوى:

تعريف: نسمي السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_n(z-a)^n + \dots$$

سلسلة قوى حيث إن a_n تسمى الأمثال و نسمي a مركز السلسلة .

مثال 32

السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n+3}$ سلسلة قوى ، حيث إن $a_n = \frac{1}{n+3}$

نلاحظ أن سلسلة القوى دوماً لها نطاق تقارب وهو يتعين مثلاً من معيار دالامبير كمايلي:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n (z-a)^{n+1}}{a_n (z-a)^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| . |z-a| < 1$$

$$|z-a| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R_n$$

فإذا كان هناك نصف قطر تقارب R_n محدود عندها يكون النطاق محدود مركزه $z=a$ هو نطاق التقارب وخارجه يكون نطاق التباعد أما على المحيط فهناك حالة من الشك قد تكون السلسلة الناتجة متقاربة أو متباعدة حسب الحالة ، وعندما يكون R_n غير محدود عندها تكون السلسلة متقاربة على المستوي z كله أما إذا كانت $R_n=0$ عندها تكون السلسلة متقاربة فقط عندالنقطة $z=a$.

نظرية تايلور في النشر:

بفرض أن $f(z)$ دالة تحليلية ممثلة بالسلسلة التالية :

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

عندها تكون الأمثال a_n معينة كمايلي: $a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

البرهان:

بما أن $f(z)$ تحليلية على منطقة ما R عندها فهي تقبل الاشتقاق دوماً لهذا يكون: $f(z)=a_0+a_1(z-a)+...+a_n(z-a)^n+...$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-a) + \dots$$

$$f'(a) = a_1$$

بنفس الطريقة نجد: $f''(a) = 2! \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} f''(a)$

$$f'''(a) = 3.2.1.a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

وبشكل عام نجد: $f^{(n)}(a) = a_n . n! \Rightarrow$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

وبالتالي يكون: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

لنبرهن العكس.

إذا كان $f(z)$ تحليلية على منطقة R من المستوي المركب Z.

وكانت a نقطة داخلية من R وكان Γ دائرة تحيط بـ a ومركزها a ويقع Γ ضمن R فإن:

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+..+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+(z-a)^n f^{(n)}(z).+...$$

حيث $f_n(z)$ دالة تحليلية داخل Γ من أجل أي نقطة z داخل Γ.

لدينا حسب علاقة كوشي (صيغ كوشي الأولى).

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

لكن:
$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a+a-z}=\frac{1}{w-a-(z-a)}$$

$$=\frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$$

وبما أن $|z-a|<|w-a|$ لهذا يمكن النشر وفق سلسلة هندسية أساسها $\left|\frac{z-a}{-z+w}\right|<1$ فنجد

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}\left[1+\frac{z-a}{w-a}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+...\right]$$

$$=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+...+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\frac{h_n}{w-a}$$

وبفرض $h_n = \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n} \cdot \frac{(z-a)}{(w-a)-(z-a)}$ مهما تكن w من المنحني Γ وبذلك نجد:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(w)dw\left[\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\frac{hn}{w-a}\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-a}dw+\frac{(z-a)}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+$$

$$+\frac{(z-a)^2}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^3}dw+\ldots+g_n(z)$$

وحسب صيغ كوشي التكاملية نجد:

$$f(z)=f(a)+\frac{(z-a)}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)$$

$$+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a)+g_n(z)$$

حيث:
$$g_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma n}\frac{h_n f(w)dw}{(w-a)}=\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)dw}{(w-a)^n(w-z)}$$

$$=(z-a)^n f_n(z)$$

نلاحظ أن: $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = 0$

لأن: $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1 \quad , \quad |f(w)| \le M$

لأن $f(w)$ تحليلية على R وبالتالي نحصل على نشر تايلوز:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

نشر ماك لوران:

إذا كانت $a=0$ نحصل على ما يسمى نشر لوران (ماك لوران) وهو النشر في جوار الصفر. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

مثال34 انشر الدوال الأساسية في جوار الصفر.

1 . الدالة الأسية $f(z) = e^z$ نلاحظ أن مشتقات هذه الدالة هي نفسها وقيمها في $z=0$ هي 1 ولهذا نبدل في سلسلة ماك لوران فنجد:

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{1!} z^2 + \ldots + \frac{1}{n!} z^n + \ldots$$

ونصف قطر تقارب هذه السلسلة ∞ أي إنها متقاربة في كل المستوي.

2 . نشر الدالة الجيبي $f(z) = Sinz$

نلاحظ: $f(0) = Sin\,0 = 0$

$$f`(0) = Cos\,0 = 1$$

$$f``(0) = -Sin\,0 = 0$$

$$f```(0) = -Cos0 = -1$$

وهكذا نجد: $Sin\,z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$

$$Sin\,z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \forall z \in Z$$

3 . نشر الدالة $f(x) = Cos\,z$ نلاحظ أن :

$$f(0) = Cos\,0 = 1$$
$$f'(x) = Sin\,0 = 0$$
$$f''(0) = -\,Cos\,0 = -1$$

$$Cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

$$Cosz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \forall z \in Z$$

4 . نشر الدالة: $f(z) = Shz$

بنفس الطريقة نجد: $Sh\, z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + ...$

$$Sh\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \forall z \in Z$$

5 . نشر الدالة: $Ch\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ...$

$$Ch\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad \forall z \in Z$$

علاقات أولر بين الدوال القطعية والدائرية والدالة الأسي:

من نشر الدالة الأسية وجدنا:

$$e^{z} = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + ... + \frac{1}{n!} z^n + ... \quad \forall z \in Z$$

لنبدل كل iz بـ z فجد: $e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + ...$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^9}{9!} ... \right)$$

$$e^{iz} = Cosz + iSinz \quad \forall z \in Z$$

نبدل كل z بالمقدار $-z$ $e^{-iz} = Cosz - iSinz$

نجمع العلاقتين الأخيرتين فنجد: $e^{iz}+e^{-iz}=2Cos\, z$

$$Cosz=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\quad \forall z\in Z$$

لو طرحنا تلك العلاقتين لوجدنا: $e^{iz}-e^{-iz}=2iSin\, z$

$$Sin\, z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2!}\qquad \forall z\in Z$$

من نشر الدالة الأسي e^z نلاحظ:

$$e^{z}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\quad+\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)$$

$$e^{z}=Ch\, z+Sh\, z$$

نبدل كل z بـ $-z$ فنجد: $e^{-z}=Chz-Shz$

بجمع العلاقتين الأخيرتين نجد: $e^{z}+e^{-z}=2Chz$

ولو طرحنا تلك العلاقتين لوجد بعد القسمة على 2 نجد :

$$Shz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\qquad \forall z\in Z$$

العلاقة بين الدوال الدائرية والقطعية:

عن علاقات الجيب والتجيب القطعي نبدل iz في علاقة Chz فنجد:

$$Chiz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = Cosz$$

أي $Chiz = Cosz$ نبدل في علاقة Sh أيضاً كل iz بـ z.

$$Shiz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$Shiz = i\,Sinz$$

6 . نشر الدالة $f(z) = \frac{1}{1-z}$ بتطبيق علاقة ماك لوران في النشر نجد:

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ \ldots\ + z^n + \ldots$$

وبتطبيق معيار دالامبير نجد أن شرط النشر هو $|z| < 1$

7 . نشر الدالة $f(z) = \frac{1}{1+z}$ نبدل في نشر $\frac{1}{1-z}$ كل $-z$ عن z

فنجد: $|z| < 1$, $f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \ldots + (-1)^n z^n$

8 . نشر الدالة $f(z) = \ln(1+z)$

بأخذ مشتق الطرفين نجد أن : $[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z}$

$$[\ln(1+z)]' = 1 - z + z^2 - z^3 + ..$$

و بمكاملة الطرفين نجد: $\ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad , \quad |z| < 1$$

9 . نشر الدالة $f(z) = \ln(1-z)$

نلاحظ أن: $[\ln(1-z)]' = \frac{-1}{1-z}$

ومنه: $\ln(1-z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - ....$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad , \quad |z| < 1$$

10 . نشر الدالة (نشر ذي الحدين لنيوتن):

حقيقي $m \in R$; $f(z) = (1+z)^m$ نلاحظ: $f(0) = 1$

$$f'(0) = m(1+0)^{m-1} = m$$

$$f''(0) = m\ (m-1)(1+0) = m(m-1)$$

وهكذا..

$$f(z) = (1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2}z^2$$
$$+ .. + \frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{n!}z^n + ...$$

ملاحظة:

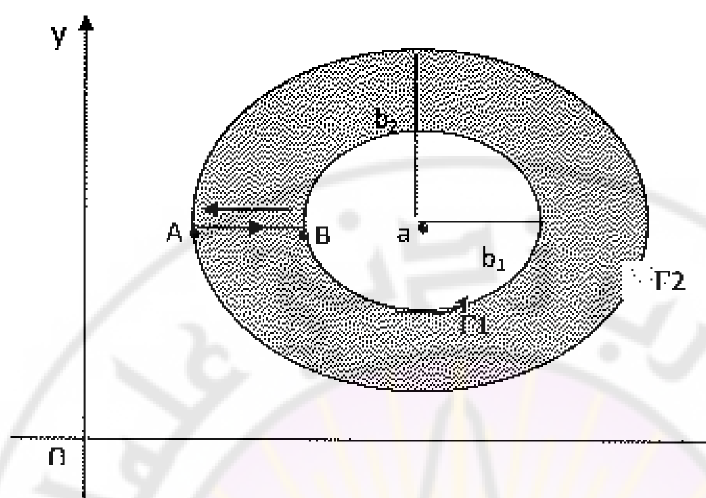
في نشر الدوال استخدمنا فكرة مشتق سلسلة وتكامل سلسلة وهذا ممكن عندما يكون التقارب منتظماً وهنا على النطاق $|z|<1$ كان التقارب كذلك.

نشر لورانت:

بفرض Γ_2, Γ_1 دائرتان متمركزتان عند $z=a$ نصف قطر الأولى b_1 والثانية b_2.

لنفرض أن الدالة $f(z)$ وحيدة القيمة (غير متعددة القيم) وتحليلية على الحلقة الدائرية. $b_1 < |z-a| < b_2$

عندها يمكننا نشر $f(z)$ وفق السلسلة: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$



حيث تعطى الثوابت a_n وفق التكاملات التالية :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dt$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z}{(z-a)^{-n+1}} \, dt$$

إذا طبقنا نظرية صيغ كوشي التكاملية على المنطقة بسيطة الاتصال الناتجة عن قطع الحلقة بقطعة مستقيمة AB كما في الشكل نجد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma 1} \frac{f(w)}{w-z} \, dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma 2} \frac{f(w)}{w-z} \, dt$$

حيث w نقطة أي نقطة من الحلقة (المنطقة البسيطة) ولقد وجدنا عند برهان نظرية تايلور أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

حيث:
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

ويذلك يتم البرهان على: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$

وهو نشر لورانت على الحلقة: $b_1<|z-a|<b_2$

ملحوظة: إن إيجاد نشر لورانت باستخدام الثوابت a_n هي عملية معقدة لهذا تستخدم الطريقة السابقة فقط في الأبحاث النظرية وسوف نرى طرق أخرى لإيجاد نشر لورانت بشكل أسهل.

تعين نوع النقطة الشاذة وفق نشر لورانت:

نلاحظ من نشر لورانت أنه يتألف من جزئين أحدهما يحوي أساً موجباً لـ $(z-a)$ والآخر أساً سالبة لـ$(z-a)$. نسمي الأول الجزء التحليلية والثاني الجزء الرئيسي. أي لدينا:

$$f(z) = .. + \frac{a_n}{(z-a)^n} + .. + \frac{a_{-1}}{z-a} +$$

$$a_0 + a_1(z-a) + .. + a_n(z-a)^n + ..$$

نسمي a_{-1} راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة الشاذة $z=a$

حالات نشر لورانت :

1 . إذا كان نشر لورانت لا يحوي جزءاً رئيسياً عندها تكون $z=a$ نقطة شاذة قابلة للحذف والدالة تكون عندها غير معرفة عند $z=a$ ولكن يوجد لها نهاية يمكن تعريفها بأنها قيمة الدالة عند $z=a$

مثال 35

الدالة الكسرية : $f(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$

$f(1)$ غير معرفة

لكن: $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \left[\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)}\right]_{z\to 1} = 2$

2 . عندما يكون الجزء الرئيسي محدوداً وأكبر أس لـ $(z-a)$ في المقام هو عندها تكون $z=a$ قطب من الدرجة n لأن:

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)\neq 0$$

والنهاية موجودة من أجل $0\neq a_n$

3 . عندما يكون الجزء الرئيسي غير محدود وعندها $z = a$ نقطة شاذة أساسية لأن: $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)$

غير موجودة مهما تكن n .

تمارين (3) محلولة

Solved Problems

تمرين 30

عين نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^n+z^{n+1})$ ثم احسب مجموعها:

الحل:

لأجل تعيين نطاق تقارب السلسلة نطبق أحد معايير التقارب وليكن معيار دالامبير :
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(z^{n+1}+z^{n+2})}{(-1)^n(z^n+z^{n+1})}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}(1+z)}{z^n(1+z)}\right|<1$$

حيث إن : $|z|<1$ نطاق التقارب.من أجل حساب المجموع نلاحظ:

$$S_0=1+z$$

$$S_1=1+z-(z-z^2)=1-z^2$$

$$S_2=1-z^2+z^2+z^3=1+z^3$$

....

$$S_n=1+(-1)^n z^{n+1}$$

وبما أنه في مجال التقارب $|z|<1$ لهذا يكون :

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ وهي نهاية أو مجموع السلسلة.

تمرين 31 عين نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 z^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

الحل:

نطبق معيار كوشي: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2\left\|\frac{z+1}{z-1}\right\|<1$$

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right|<3$$

باستبدال $z=x+iy$ نجد المتراجحة التالية: $(x-\frac{5}{4})^2+y^2>\frac{9}{16}$

أي نطاق التقارب هو: $\left|z-\frac{5}{4}\right|>\frac{3}{4}$

المنطقة خارج القرص الدائري الذي مركزه $\frac{5}{4}$ ونصف قطره $r=\frac{3}{4}$.

تمرين 32

أوجد نشر تايلور للدالتين $\cos z$ في جوار $z=\frac{\pi}{4}$ مبيناً شرط النشر.

الحل: لنفرض $u=z-\frac{\pi}{4}$ عندها $z=u+\frac{\pi}{4}$

نبدل:
$$f(z)=\cos z=\cos\left(u+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos u\cos\frac{\pi}{4}+Sinu Sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u+Sinu)$$

ننشر في جوار $u=0$ فيكون ذلك في جوار $z=\frac{\pi}{4}$

$$f(z)=F(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}[1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\frac{u^6}{6!}+..\frac{u}{1!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}...$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+\frac{u}{1!}-\frac{u^2}{2!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^5}{5!}+\frac{u^6}{6!}+\frac{u^7}{7!}...$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+\frac{(z-\frac{\pi}{4})}{1!}-\frac{(z-\frac{\pi}{4})^2}{2!}-\frac{(z-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\frac{(z-\frac{\pi}{4})^4}{4!}...]$$

أما شرط النشر فهو $\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<\infty$

فالدالة قابلة للنشر دوماً على كامل المستوى المركب Z .

تمرين 33

عين جميع حالات نشر لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$

في حلقة مركزها $z-0$ أوجد هذا النشر على الحلقة $0<|z|<1$ مبيناً نوع النقطة الشاذة ، ثم أوجد راسبها $\operatorname{Res}(f,0)$

الحل: النقاط الشاذة هي النقاط التي تعدم المقام وهي:

$$z=0,\quad z=1,\quad z=2$$

وحالات النشر هي الموافقة لـ أن يكون النطاق لا يحوي أي نقطة شاذة ولهذا فهي: $|z|>2$, $1<|z|<2$, $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$

من أجل النشر على الحلقة $0<|z|<1$ نفرض الكسر

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{z-2}$$

$$A=\lim_{z\to 0} z^2 f(z)=\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{z\to 0}[z^2 f(z)]^1=\frac{3}{4}$$

$$C = \lim_{z \to 0} (z-1) f(z) = -1$$

$$D = \lim_{z \to 2} (z-2) f(z) = \frac{1}{4}$$

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z^2} + \frac{\frac{3}{4}}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{\frac{1}{4}}{z-2}$$

نلاحظ أن الكسر الأول والثاني منشوران لهذا بقي نشر الكسر الثالث والرابع:

$$\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + .. + z^n + .. \qquad |z| < 1$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{z-2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{4(1-\frac{3}{2})} = -\frac{1}{8}\left[1 + \frac{z}{2} + (\frac{z}{2})^2 + ...\right]$$ وهذا محقق

$\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ وهذا محقق لأن $|z| < 1$ وبجمع النشور السابقة نجد :

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z^2} + \frac{\frac{3}{4}}{z} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} z + \frac{31}{32} z^2 + ..$$

Z=0 قطب من الدرجة الثانية ، أما الراسب هو $\operatorname{Re} s(f, 0) = \frac{3}{4}$

تمرين 34

أوجد نشر لورانت للدوال التالية في حلقة مركزها النقطة الشاذة $z=0$ مبيناً نوع النقطة الشاذة ، ثم أوجد راسبها $\operatorname{Res}(f,0)$ لكل حالة .

$$f_1(z)=\frac{z-Sinz}{z^3} \quad ; \quad f_2(z)=\left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}$$

$$f_3(z)=\frac{1}{Sh^2 z} \quad ; \quad f_4(z)=\frac{e^{2z}-1}{z^4}$$

الحل: أولاً حالة f_1 :

$$f_1(z)=\frac{z-\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+..\right)}{z^3}$$

$$=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}..$$

$z=0$ نقطة شاذة قابلة للحذف، و راسبها $\operatorname{Res}(f,0)=0$

أولاً حالة f_2 :

$$f_2(z)=\left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}$$

$$=\left[z+\frac{1}{z}\right]\left[1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+..\right]$$

$z=0$ نقطة شاذة أساسية ، و راسبها $\operatorname{Res}(f,0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$f_3(z)=\frac{1}{Sh^2 z}=\frac{1}{\left[\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right]^2}=\frac{1}{z^2[1+\alpha(z)]^2}$$

حيث:
$$\alpha(z)=\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots$$

نلاحظ أن $\alpha(z)\to 0$ عندما $z\to 0$

لهذا $|\alpha(z)|<1$ ومنه $f_3(z)=\frac{1}{z^2}[1+\alpha(z)]^{-2}$

$$=\frac{1}{z^2}\left[1-2\alpha(z)+\frac{(-2)(-3)}{2!}\alpha^2(z)+..\right]$$

$$=\frac{1}{z^2}-2\left(\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}..\right)+\frac{3}{z^2}\alpha^2(z)+..$$

$z=0$ قطب من المرتبة الثانية.

$$f_4(z)=\frac{e^{2z}-1}{z^4}=\frac{1+\frac{(2z)}{1!}+\frac{(2z)^2}{2!}+\dots}{z^4}$$

$$=\frac{2}{z^3}+\frac{4}{2!z^2}+\frac{8}{3!z}+\frac{16}{4!}+\frac{32}{5!}z$$

$z=0$ قطب من الدرجة الثالثة، و راسبها $\operatorname{Res}(f,0)=\frac{8}{3!}=\frac{4}{3}$

تمرين 35 عين النقطة الشاذة للدوال التالية وعين الراسب:

$$f_1(z)=Sin\frac{1}{z} \quad ; \quad f_2(z)=\frac{1}{\cos z}$$

$$f_3(z)=tgz \quad ; \quad f_4(z)=\frac{z+i}{(z^2+1)^2}$$

الحل:
$$f_1(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}....$$

$z=0$ شاذة أساسية الراسب عندها $\operatorname{Re}s(f,0)=1$

$$f_2(z)=\frac{1}{\cos z}$$

$z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ أقطاب بسيطة الراسب عندها.

$$\operatorname{Re}s(f,(2k+1)\frac{\pi}{2})=\lim_{z\to(2k+1)\frac{\pi}{2}}\frac{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}}{\cos z}$$

$$=\frac{1}{-Sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}=(-1)^k \quad k=0,1,2,...$$

$$f_3(z)=tgz=\frac{Sinz}{Cosz}$$

$z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ أقطاب بسيطة الراسب عندها.

$$\lim_{z\to(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\left(z-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)Sinz}{\cos z} = \frac{Sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{-Sin(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\operatorname{Re}s(f,(2k+1)\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$f_4(z) = \frac{z+i}{(z^2+1)^2} = \frac{(z+i)}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

$z=-i$ قطب بسيط. $z=i$ قطب مضاعف.

$$\operatorname{Re}s[f_4(z),-i] = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)^2}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$\operatorname{Re}s[f_4(z),i] = \lim_{z\to i} \left[\frac{(z+i)(z-i)^2}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]'$$

$$= \left.\frac{-1}{(z+i)^2}\right|_{z=i} = \frac{-1}{(2i)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Re}s(f_4,i) = \frac{1}{4} \quad , \quad \operatorname{Re}s(f_4,-i) = \frac{-1}{4}$$

تمارين (4) إضافية

1 برهن أن: $\forall z \in Z \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)=1$

2 . برهن تقارب $\sum_{n=0}^{\infty} z^n(1-z)$ و أوجد مجموعها .

3 . برهن أن السلسلة $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ تتقارب بانتظام من الصفر وذلك

مهما يكن $|z|\geq 2$ هل يمكن توسيع نطاق التقارب؟

4 . برهن أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ متقاربة مطلقاً من أجل $|z|\leq 1$

5 . أوجد نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

6 . أوجد سلاسل لورانت للدوال التالية:

$$F_1(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)z}\ , \quad z=1 \qquad\qquad F_2(z)=(z-3)Sin\frac{1}{z+2}\ , z=-2$$

7 . انشر الدالة $F(z)=\frac{4}{(z+3)(z+4)}$ حيث $3<|z|<4$

8 . انشر الدالة $F(z)=\frac{z}{(z+1)(z+3)}$ في الحالات التالية:

أ . $1<\lvert z\rvert<3$	ب . $\lvert z\rvert>3$
ج . $0<\lvert z+1\rvert<2$	د . $\lvert z\rvert<1$

الفصل الرابع

نظرية الرواسب وتطبيقاتها

The Residue Theorem and it's Applications

تمهيد:

بفرض $f(z)$ دالة تحليلية على منطقة محاطة بالدائرة المستمرة المغلقة والموجهة والصقيلة أو الصقيلة جزئياً Γ_1 فيما عدا مركز الدائرة Γ_1 حيث وجدنا أنه يمكن عندها نشر هذا الدالة وفق سلسلة لورانت كمايلي:

$$f(z) = .. + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + ..$$

$$+ \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + ..$$

علماً أن هذه الثوابت تعطى وفق العلاقات:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\, dz$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

حيث Γ دائرة مركزها 0 و تقع داخل Γ_1 ، نلاحظ من علاقة a_n أنه

من أجل $n=1$ $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz$$

أي أن : $$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

أي أن الثابت a_{-1} له صفة مميزة وهي أنه لو عرف لأمكن حساب التكامل $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ مع أن $f(z)$ شاذة في النقطة a الواقعة داخل Γ

نسمي هذا الثابت براسب الدالة $f(z)$ عند النقطة الشاذة $z=a$ ونرمز له بالرمز $\operatorname{Res}[f(z),a] = a_{-1}$

طرق حساب الرواسب:

إن إيجاد الراسب وفق العلاقة التكاملية السابقة أمر ليس بالسهل ولهذا يلجأ إلى طرق أخرى نرتبها حسب نوع النقطة الشاذة.

1 . النقطة الشاذة القابلة للحذف يكون فيها نشر لورانت لا يحوي أمثال $\frac{1}{z-a}$ وبالتالي يكون الراسب صفراً.

2 . النقطة القطب البسيط يتعين الراسب عندها من العلاقة:

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

مثال40 بين نوع النقطة الشاذة للدالة $f(z)=\dfrac{z+2}{z-4}$

الحل : $z=4$ قطب بسيط والراسب عندها هو :

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to 4}\frac{(z-4)(z+2)}{(z-4)}=6$$

3 . النقطة الشاذة قطب من الدرجة n

عندها يتعين الراسب من العلاقة: $\operatorname{Res}[f(z),a]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\left[(z-a)^n f(z)\right]$

مثال41 بين نوع النقطة الشاذة للدالة $f(z)=\dfrac{Sin(2z)}{\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)^2}$

الحل : الدالة شاذة عند $z=-\dfrac{\pi}{2}$ لهذا يكون

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2 Sin(2z)}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]'$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z),-\frac{\pi}{2}\right]=\left[Sin(2z)\right]'_{z=\frac{\pi}{2}}=\left[2Cos(2z)\right]_{z=-\frac{\pi}{2}}=-2$$

4 . النقطة شاذة أساسية: عندها لا يوجد طريقة غير النشر وتعين أمثال $\frac{1}{z-a}$

مثال42 بين نوع النقطة الشاذة للدالة $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$

الحل : ننشر في جوار $z=1$

$$=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+..$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z=1]=1$$

نظرية الرواسب:

بفرض $\overline{D}$ منطقة يحيط بها المنحني Γ وإذا كان $f(z)$ تحليلية على $\overline{D}$ فيما عدا عدد محدود من الأقطاب أو النقاط الشاذة الأساسية داخل $\overline{D}$ عندها

$$I=\oint_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}[f(z),a_j]$$

حيث : a_j هي الأقطاب أو النقاط الشاذة الواقعة داخل $\overline{D}$.

البرهان:

نحيط كل نقطة شاذة a_j بمنحنٍ موجه ومستمر Γ_j حيث $j=1,..,k$ وبما أن $f(z)$ تحليلية على المنطقة المحصورة بين Γ والمنحنيات

$\Gamma_1,...,\Gamma_k$ تكون هذه المنحنيات الأخيرة مكافئة للمنحني Γ أي حسب نظرية كوشي في الدوال التحليلية يكون لدينا:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma 1} f(z)dz + \ldots + \oint_{\Gamma_k} f(z)dz$$

وحسب تعريف الراسب نجد:

$$\text{Res}\left[f(z),a_j\right] = 2\pi i \oint_{\Gamma j} f(z)dz \quad j=1,..,k$$

ومنه: $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \,\text{Res}\left[f(z),a_1\right] + \ldots + 2\pi i \,\text{Res}\left[f(z),a_k\right]$

$$= 2\pi i \sum_{a=1}^{j=k} res\left[f(z),a_j\right]_{a_j=1,2,..,k}$$

الراسب عند نقطة اللانهاية:

إذا أضفنا النقطة $z=\infty$ إلى المستوي المركب Z نحصل على ما يسمى بالمستوي المركب الموسع.

تعريف:

نعرف راسب الدالة $w=f(z)$ في اللانهاية بأنه يحقق الخاصة:

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right] + \operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right] = 0$$

حيث a_j الأقطاب الواقعة داخل المنحني Γ الذي يحسب عليه التكامل.

يعطى راسب اللانهاية للدالة $f(z)$ كمايلي:

$$\operatorname{Res}_{z\to\infty} f(z) = -\left\{\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u^2}\right)\right\}$$

البرهان: نعلم أن: $I = \oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a=1}^{k} \operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right]$

a_j الأقطاب داخل Γ لنجري التحويل $z = \frac{1}{u}$, $dz = -\frac{1}{u^2}du$

$$I = \oint_{\Gamma} f(z)dz = -\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u^2}\right)du$$

وحسب نظرية الرواسب نجد: $I = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)\right)\right]$

$$= 2\pi i \sum_{a=1}^{k} \operatorname{Res}\left[f(z),a_i\right]$$

ومنه: $\sum_{a=1}^{k} \operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right] + \operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right] = 0$ حيث Γ_1 منحنياً محيط بالنقطة $u=0$ وجهه الدوران عكس عقارب الساعة ولا يوجد فيه غير $u=0$ نقطة شاذة.

ملاحظة: إذا أردنا مكاملة $f(z)$ على منطقة D يحدها المنحني الموجه Γ وأقطابه داخل هذا المنحني هي $a_1........a_n$ فإننا نحسب هذا التكامل كمايلي:

$$\oint f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}\, a_1 + ... + \mathrm{Res}\, a_n]$$

$$= 2\pi i\, \mathrm{Res}(f(z),\infty)$$

$z = \frac{1}{u} = \infty \Leftrightarrow u = 0$ وهذا يسهل علينا الحساب

مثال43 احسب التكامل: $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{z^5 + z + 1}{z^2(z^4 - 1)} dz$ حيث Γ الدائرة $|z| = \frac{3}{2}$

الحل : نلاحظ لدينا خمسة أقطاب تقع داخل الدائرة Γ لهذا يكون:

$$I = 2\pi i[\mathrm{Res}[a_1] + ... + \mathrm{Res}[a_5]] = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

نجد:

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\operatorname*{Res}_{u=0} \frac{1}{u^2} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)^5 + \frac{1}{u} + 1}{\left(\frac{1}{u}\right)^2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4 - 1\right]}$$

$$= -\mathrm{Res}\left[\frac{1 + u^4 + u^5}{1 - u^4}\right]_{u=0} = -1$$

$$I = -2\pi i(-1) = 2\pi i$$

المؤلفون : د.محمد نور شمه د. عازار الشايب د. شكري أبو عرابي

تطبيقات نظرية الرواسب في التكاملات الحقيقية:

سوف نبين أنه يمكن استخدام نظرية الرواسب في حساب بعض التكاملات الحقيقية وذلك باستخدام محيط معين واختيار دالة معين.

1 . حساب التكامل من الشكل: $I = \int_{0}^{2\pi} f(\cos\theta, Sin\theta)d\theta$

لحساب هذا التكامل يلزم مايلي:

1 . حدود التكامل كما هي واضحة $(0,2\pi)$

2 . الدالة $f(Cos\theta, Sin\theta)$ دالة كسري جبري بسيط بالرمز $Sin\theta, Cos\theta$ (أي دالة كسري مثلثاتي) ومقامه لا ينعدم من أجل أية قيمة حقيقية لـ θ

عندها نتبع مايلي: نفرض $z = e^{i\theta}$ فنجد أن حدود التكامل أصبحت توافق المنحني $|z| = 1$ وبالتالي: $Sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$

$$Sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2i}$$

$$Cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \Rightarrow Cos\theta = \frac{z^2 + 1}{z^2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

نبدل في علاقة التكامل فنجد: $I = \oint f\left(\frac{z^2+1}{z^2}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = \oint_{1=|z|=\Gamma} F(z)dz$

وحسب نظرية الرواسب فإن : $I = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \mathrm{Res}\left[F(z), a_j\right]$

حيث إن : a_j الأقطاب الواقعة داخل $|z| = 1$

مثال44 : احسب التكامل الحقيقي: $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{Sin\theta + 3}$

نفرض $z = e^{i\theta}$ فنجد $|Z| = 1$ حدود التكامل. $d\theta = \frac{dz}{iz}$ $\quad Sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}$

$$I = \oint_{1=|z|} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z^2-1}{2iz} + z} = \oint_{1=|z|} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z^2+6iz-1}{2iz}}$$

$$= 2\oint_{1=|z|} \frac{dz}{z^2+6iz-1}$$

الأقطاب تتعين بالعلاقة : $z^2 + 6iz - 1 = 0 \quad \Delta = -32$

$$z_1 = -\frac{6i - 4i\sqrt{2}}{2} \notin |z| < 1$$

$$z_2 = \frac{-6i + 4i\sqrt{2}}{2} = (-3 + 2\sqrt{2})i \in |z| < 1$$

هناك قطب بسيط واحد لنحسب الراسب عنده.

$$\operatorname{Res}[f(z), z_2] = \lim_{z \to z_2} \frac{z - z_2}{z^2 + 6iz - 1}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_2] = \frac{1}{2(z_2) + 6i}$$

$$= \frac{1}{2i(-3 + 2\sqrt{2}) + 6i} = \frac{1}{4i\sqrt{2}}$$

$$I = 2\pi i(2)\left(\frac{1}{4i\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

2 . حساب التكاملات ذات الشكل: $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$ حيث $f(x)$ دالة كسري جبري بسيط من أجل ذلك نتأكد من الشروط التالية:

1 . حدود التكامل $(-\infty, \infty)$. 2 . $f(x)$ دالة كسري جبري بسيط لا ينعدم مقامه من أجل قيمة حقيقية للمتحول x.

3 . درجة البسط في $f(x)$ أقل من درجة المقام بالرمز 2 على الأقل أو أنه يحقق: $xf(x) \to 0$

$x \to \infty$

عند ذلك نختار الدالة $f(z)$ الناتج عن استبدال z بالرمز x في $f(x)$ وتكامل هذا الدالة على المنطقة $\overline{D}$ وهي نصف دائرة فوق محور العينات نصف قطرها R يسعى إلى اللانهاية يمكن البرهان ضمن هذه الشروط أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \oint_{\Gamma} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[f(z), a_j\right]$$

حيث a_j الأقطاب الواقعة فوق محور السينات.

نستنتج أن: $\oint_{D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[f(z), a_j\right]$

$$\oint_{D} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(\operatorname{Re}^{i\theta}) i \operatorname{Re}^{i\theta} d\theta + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

لكن التكامل الأول يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ حسب الشروط المفروضة، لأن طويلته $|z f(z)|$ تسعى إلى الصفر وبالتالي؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \mathrm{Res}\left[f(z), a_j\right]$$

مثال45 احسب التكامل: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

الحل: نلاحظ أن حدود التكامل $(-\infty,\infty)$ والدالة $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ يحقق:

المقام لا ينعدم من أجل قيمة حقيقية لـ x كذلك درجة البسط أقل من درجة المقام بالرمز 4 حيث يكفي درجتين وعندها.

نختار $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ ونبحث عن أقطابه

$$z^4 + 1 = 0 \quad ; \quad z^4 = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4})} \qquad k = 0,1,2,3$$

الأقطاب الواقعة فوق محور السينات (في نصف المستوي العلوي) هي:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

وهي أقطاب بسيطة والرواسب عندها تحسب كما يلي:

$$\mathrm{Res}\left[f(z), e^{i\frac{\pi}{4}}\right] = \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{z^4+1} = \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), e^{i\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi}{4} i}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), e^{i\frac{\pi}{4}}\right] = \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{z^4 + 1} = \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), e^{i\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi}{4} i}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), e^{i\frac{3\pi}{4}}\right] = \frac{1}{4.e^{(\frac{3\pi}{4})3 i}} = \frac{1}{4} . e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$I = 2\pi i \left[\frac{1}{4}\left[Cos(\frac{3\pi}{4}) - iSin\frac{3\pi}{4}\right] + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - iSin\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right] = \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{2i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3 . حساب التكاملات ذات الشكل: $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) Cosmx \, dx$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, Sinmx \, dx \qquad m > 0$$

من أجل ذلك نتأكد من الشروط التالية:

1 . $0 < m$ وحدود التكامل $(-\infty,\infty)$.

2 . الدالة $f(x)$ كسري جبري بسيط مقامه لا ينعدم من أجل قيمة حقيقته للمتحول x .

3 . درجة البسط أقل من درجة المقام بالرمز 1 على الأقل أي

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ ، عند ذلك نختار الدالة $f(z)=e^{imz}f(z)$

حيث $f(z)$ نحصل عليه من $f(x)$ باستبدال z بالرمز x ونكامل على المنطقة $\overline{D}$ الظاهرة بالشكل وهي نصف دائرة فوق محور السينات نصف قطرها R يسعى إلى ∞ فنجد:

$$\oint_D f(z)dz=\oint_\Gamma f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)e^{imx}dx=2\pi i\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right]$$

حيث إن a_j الأقطاب فوق محور السينات. إن التكامل $\oint_\Gamma f(z)dz$ يسعى إلى الصفر عندما تسعى z إلى ∞ وفق شروط المسألة المفروضة لهذا يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{imx}dx=2\pi i\sum_{j=1}^{j=k}\operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,Cosmx\,dx+i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,Sinmx\,dx=$$

$$=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right]$$

$$I_1 + iI_2 = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[F(z), a_j\right]$$

$$I_1 = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[F(z), a_j\right]\right\}$$

$$I_2 = I_m\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}[F(z), a_j\right\}$$

مثال46 احسب التكامل: $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cosx}{x^2+1} dx$

الحل: $m=1$ وحدود التكامل $(-\infty, \infty)$

المقام للدالة $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ لا ينعدم من أجل قيمة حقيقية لـ x كذلك درجة البسط أقل من درجة المقام بالرمز 2 يكفي درجة واحدة ، لذا نختار الدالة:

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

نبحث عن الأقطاب الواقعة فوق محور السينات (في نصف المستوي العلوي).

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = i \subset \overline{D}$$

$$z = -i \in \overline{D}$$

$$\operatorname{Res}[F(z), i] = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)e^{iz}}{z^2+1}$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{2z}$$

$$= \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ie}$$

$$I = \text{Re}\left\{2\pi i\left(\frac{1}{2ie}\right)\right\} \quad I = \frac{\pi}{e}$$

4 . حساب التكاملات: $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, Cosmx\, dx \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, Sinmx\, dx$$

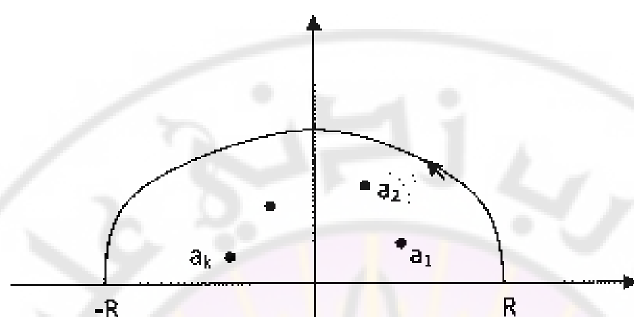
ضمن الشروط الواردة في الحالة 2 و 3 عدا شرط عدم وجود أقطاب حقيقية للدالة $f(z)$ ،وهنا في هذه الحالة نفترض إمكانية وجود هذه الأقطاب وبمناقشة مشابهة لما ورد في الحالتين 2 و 3 نجد:

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}\left[F(z), a_j\right] + \pi i \sum_{j=1}^{l} \text{Res}\left[F(z), b_j\right]$$

$$I_1 = \text{Re}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}\left[F(z), a_j\right] + \pi i \sum_{j=1}^{l} \text{Res}\left[F(z), b_j\right]\right\}$$

$$I_2 = \text{Re}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}\left[F(z), a_j\right] + \pi i \sum_{j=1}^{l} \text{Res}\left[F(z), b_j\right]\right\}$$

حيث b_j الأقطاب الواقعة على محور السينات. و أن a_j الأقطاب الواقعة فوق محور السينات وأما المنطقة $\overline{D}$ فهي الظاهرة بالشكل:



احسب التكامل الحقيقي: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sinx}{x^3 - 1} dx$

نلاحظ أن $m = 1$ وحدود التكامل $(-\infty, \infty)$ والدالة $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ درجة البسط أقل من درجة المقام بالرمز 3 يكفي 1 كذلك ينعدم المقام على محور السينات وفوق محور السينات نختار الدالة: $F(z) = \frac{e^{iz}}{z^3 - 1}$

لنعين الأقطاب المطلوبة: $z^3 = 1 = e^{2\pi ik}$

$$z = e^{i\frac{2\pi k}{3}} \quad k = 0,1,2$$

$$z_0 = 1 \in y = 0$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \in y > 0$$

$$z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \in y < 0$$ غير مطلوب

وهي كلها أقطاب بسيطة.

$$\operatorname{Res}[F(z),1] = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^3-1} = \frac{e^i}{3(1)^2} = \frac{1}{3}e^i$$

$$\operatorname{Res}\left[F(z), e^{i\frac{\pi}{3}}\right] = \lim_{z\to e^{i\frac{2\pi}{3}}} \frac{(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})e^{iz}}{z^3-1}$$

$$+\pi i(\cos 1 + iSin1)]$$

$$I = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{3}\left[\frac{Sin\frac{1}{\sqrt{2}} - Cos\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + Cos1\right]$$

5 . حساب التكامل: $I = \int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx$ حيث إن p عدد كسري.

لحساب هذا التكامل نتأكد من تحقق الشروط التالية

1 . p كسري وحدود التكامل من 0 إلى ∞ .

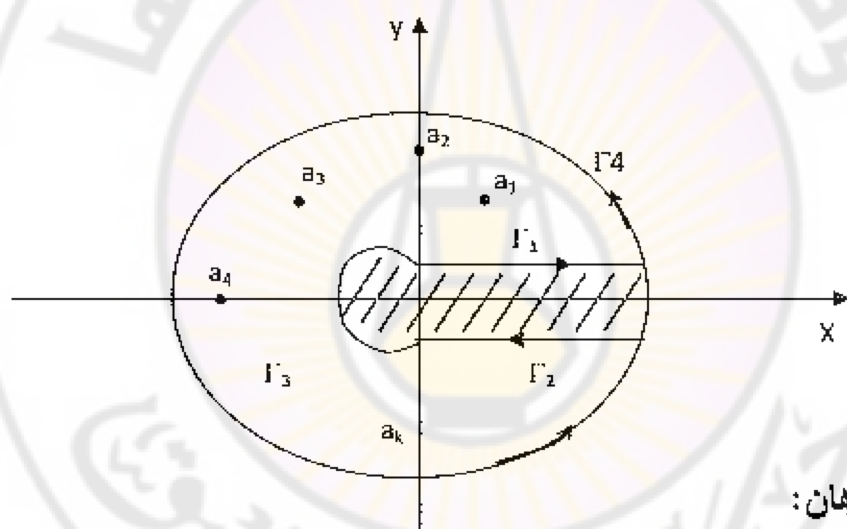
2 ـ الدالة $f(z)$ يحقق مايلي:

أ . لا ينعدم مقامه من أجل قيمة حقيقية موجبة للمتحول x.

ب ـ الدالة المكاملة تحقق الشرط : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \to \infty}} x^{p} f(x) = 0$

عند ذلك نكامل الدالة $z^{p-1} f(z)$ على المنطقة الظاهرة بالشكل، نجد عندها أن:

$I = -\frac{\pi}{\operatorname{Sin} P\pi} \cdot e^{-ip\pi} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left[z^{p-1} f(z), a_j\right]$ (a_j الأقطاب داخل $\overline{D}$)



البرهان:

إن المنطقة المختارة كما في الشكل هي دائرة مركزها 0 ونصف قطرها R يسعى إلى ∞ حذف منها نصف المحور ox لأن $z = 0$ نقطة تفرع

للدالة $z^{p-1}f(z)$ وعليه فإن التكامل عليها يمكن تجزئته إلى أربعة تكاملات: 1 . التكامل على الدائرة الكبرى ونصف قطرها R،

2 . التكامل على الدائرة الصغرى ونصف قطرها r،

3 . التكامل على القطعة المستقيمة من المركز إلى محيط الدائرة وعليها $z = x$

4 . التكامل على القطعة المستقيمة من محيط الدائرة إلى المركز وعليها $z = xe^{i2\pi}$ بسبب الدوران دورة كاملة.

أي لدينا حسب نظرية الرواسب:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, z^{p-1} dz = \int_{\Gamma 1} z^{p-1} f(z) dz + \int_{\Gamma 2} z^{p-1} f(z) dz +$$

$$+ \int_{\Gamma 3} z^{p-1} f(z) dz + \int_{\Gamma 4} z^{p-1} f(z) dz =$$

$$2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[z^{p-1} f(z), a_j\right]$$

$$\int_A^B x^{p-1} f(x) dx + \int_C^D (xe^{i2\pi})^{p-1} f(xe^{i2\pi}) d(xe^{2\pi i})$$

$$+ I_1 - I_2 = 2\pi i(\operatorname{Res} a_1 + .. + \operatorname{Res} a_k)$$

حيث I_1 التكامل على الدائرة الكبرى و I_2 على الصغرى وسوف نبرهن أن نهايتهما صفر :

$$\int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx - e^{2\pi ip}\int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx =$$

$$2\pi i(\operatorname{Res} a_1 + .. + \operatorname{Res} a_2)$$

$$(1-e)^{2i\pi p}\int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left[z^{p-1} f(z), a_j\right]\right)$$

$$\int_0^\infty xp - 1f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ip}}(\operatorname{Res} a_1 + .. + \operatorname{Res} a_k)$$

لكن:

$$\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ip}} = \frac{\pi}{e^{ip\pi}}\frac{2i}{e^{-i\pi p} - e^{i\pi p}}$$

$$= -\frac{\pi}{e^{ip\pi}}\frac{1}{\frac{e^{i\pi p} - e^{-i\pi p}}{2i}} = -\frac{\pi}{Sinp\pi}e^{-ip\pi}$$

ومنه:

$$\int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx = \frac{-x}{Sinp-x}e^{ip\pi}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left[z^{p-1} f(z), a_j\right]$$

إن التكاملين I_1 و I_2 ينعدمان لأن: $z^p f(z) \to 0$

$z \to \infty$ أو $z \to 0$

حسب الشروط ولهذا فهذان التكاملان ينعدمان لانعدام طويلتيهما.

مثال48 احسب التكامل: $I=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\cdot dx$

الحل : نلاحظ الشروط محققة ولهذا نجد أن الأقطاب هي أقطاب الدالة $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ وبالتالي فهي $z=\pm i$ وهي أقطاب بسيطة.

$$p=\frac{3}{2} \qquad\qquad p-1=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1+z^2}.(z-i)=\text{Res}\left[z^{\frac{1}{2}}f(z),i\right]$$

$$\text{Res}\left[z^{\frac{1}{2}}f(z),i\right]=\left.\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i}$$

$$\text{Res}\left[z^{\frac{3}{2}}f(z),-i\right]=-\frac{e^{+i3\frac{\pi}{4}}}{2i}$$

$$I=-\frac{\pi}{Sin\frac{3\pi}{2}}.e^{-i3\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2i}\right)$$

$$=\frac{-\pi}{-1}(i)\frac{Cos\frac{\pi}{4}}{i}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

تمارين (4) محلولة

تمرين40

بين أنواع النقاط الشاذة في كل من الدوال التالية وعين الراسب عند كل منها.

1- الدالة : $f_1(z) = \dfrac{z^2}{z^4+16}$

$$z^4+16=0 \qquad z^4=-16=16e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right)} \qquad k=0,1,2,3$$

z_0, z_1, z_2, z_3 أقطاب بسيطة.

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_j\right]=\lim_{z\to z_j}\frac{(z-z_j)z^2}{z^4+16} \qquad j=0,1,2,3$$

$$=\frac{z_j^2}{4z_j^3}=\frac{1}{4z_j}$$

2- الدالة : $f_2(z)=\dfrac{ze^z}{z^4-z^2}$

$$z^4-z^2=z^2(z^2-1)=0$$

$z=0$ قطب بسيط لأن $z=0$ نقطة شاذة قابلة للحذف. $z=\pm1$ أقطاب بسيطة.

$$\mathrm{Res}[f_2,0]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^2(z)e^z}{z^2(z^2-1)}\right]^1$$

$$= \frac{(e^z + ze^z)(z^2 - 1) - 2z(z)e^z}{(z^2 - 1)^2}\bigg|_{z=0}$$

$$\operatorname{Res}[f_2, 0] = \frac{-1}{1} = 1$$

$$\operatorname{Res}[f_2, -1] = \lim_{z \to -1} \frac{(z+1)ze^z}{z^2(z-1)(z+1)} =$$

$$= \frac{-e^{-1}}{-2} = \frac{1}{2e}$$

$$\operatorname{Res}[f_2, 1] = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)ze}{z^2(z-1)(z+1)}$$

$$\operatorname{Res}[f_2, 1] = \frac{e}{2}$$

3- الدالة : $f_3(z) = Cotg\, z = \frac{Cosz}{Sinz}$

عندمايكون مقامها $Sinz = 0$ فإنه يوجد $z = k\pi$ أقطاب بسيطة.

$$\operatorname{Res}[f_3(z), k\pi] = \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)Cosz}{Sinz} = \frac{Cosz}{Cosz}\bigg|_{z=k\pi} = 1$$

تمرين41 احسب التكامل: $I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{Sin^3 z} dz$

ننشر الدالة $Sinz$ في جوار الصفر.

$$f(z)=\frac{z^2}{\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)^3}=\frac{1}{z}\frac{1}{[1-\alpha(z)]^{+3}}$$

$$\alpha(z)=\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots=\frac{1}{z}\left[1-\frac{3}{1!}\alpha(z)+\frac{(-3)(-4)}{2i}\alpha^2(z)+\dots\right]$$

نلاحظ أن $z=0$ قطب من الدرجة الأولى الراسب عندها 1 وبالتالي:

$$I=2\pi i(1)=2\pi i$$

تمرين42 احسب التكامل: $I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z^2Sin^2z}dz$

ننشر الدالة المستكمل في جوار الصفر النقطة الشاذة الواقعة داخل $1=|z|$.

$$\frac{e^z-1}{z^2Sin^2z}=\frac{z+\frac{z^2}{2i}+\dots}{z^2.z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}\dots\right)^2}$$

$$=\left[\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z}+\dots\right][1-\alpha(z)]^{-2}$$

$$\alpha(z)=\frac{-z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots$$

$$=\left[\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z}+\dots\right][1+(-2)\alpha(z)+\dots$$

$$=\left[\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z}+\dots\right]\left[1-2\left(-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots\right)+\right.$$

$z=0$ قطب من المرتبة 3. نبحث عن أمثال $\frac{1}{z}$

$\frac{1}{z}$ أمثال $=\mathrm{Res}[f(z),0]=+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

إذاً: $I=2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)=\pi i$

تمرين43 احسب التكامل: $I=\int_0^{2\pi}\frac{Sin\theta}{Cos\theta+2}\,d\theta$

بفرض $z=e^{i\theta}$ نبدل: $d\theta=\frac{dz}{iz}$ $Cos=\frac{z^2+1}{z^2}$

$Sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$ فنجد : $I=\oint_{1=|z|}\frac{\frac{z^2-1}{2iz}}{\frac{z^2+1}{2z}+2}\cdot\frac{dz}{iz}=\oint_{1=|z|}\frac{z^2-1}{z(z^2+4z+1)}\,dz$

$$z(z^2+4z+1)=0$$

$z=0$ قطب بسيط داخل $|z|=1$

$$z^2+4z+1=0$$

$$\Delta=16-4=12$$

$$z_1 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3} \notin |z|<1 \quad , \quad Z_2 = -2+\sqrt{3} \in |z|<1$$

وهو قطب بسيط أيضاً.

$$\lim_{z\to 0} \frac{-z(z^2-1)}{z(z^2+4z+1)} = +1 = \operatorname{Res}[f(z0,0]$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-2+\sqrt{3}] = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{z(z^2-1)}{z(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} = -1$$

$$I = 2\pi i(+1-1) = 0$$

تمرين44 احسب التكامل: $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$

الحل : نلاحظ أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x^6+1}$ زوجية ، لهذا

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

الشروط في الحالة الثانية محققة لهذا نختار $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ فنجد أن

الأقطاب تتعين بالرمز : $z^6+1=0$

$$z^6 = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{6}\right)} \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \qquad z_3 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

أما الأقطاب z_3, z_4, z_5 فهي تقع تحت محور السينات ولا لزوم لها.

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{z^6 + 1} = \frac{1}{6\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{6} i}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_1] = \frac{1}{6} e^{-i\frac{5\pi}{2}} = \frac{1}{6} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_2] = \frac{1}{6} e^{-\frac{25}{6}\pi i} = \frac{1}{6} e^{-\frac{\pi}{6}}$$

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\frac{1}{6} \left(Cos \frac{5\pi}{6} - iSin \frac{5\pi}{6} + Cos \frac{\pi}{2} - iSin \frac{\pi}{2} + + Cos \frac{\pi}{6} - iSin \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi i}{6} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + 0 - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right] = \frac{\pi i}{6} [-2i] = \frac{\pi}{6}$$

تمرين45 احسب التكامل: $I = \int_0^{\infty} \frac{Cos 3x}{x^2 + 1} dx$

نلاحظ أن $m = 3$ والدالة $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ يحقق شروط الحالة الثالثة ولهذا

نختار الدالة: $F(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2 + 1}$

وأقطابه المطلوبة فقط القطب: $z = +i \in y > 0 \qquad z^2 + 1 = 0$

$$\operatorname{Res}[F(z),i] = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)e^{3iz}}{z^2+1} = \frac{e^{3i(i)}}{2i} = \frac{e^{-3}}{2i}$$

$$I = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\left(\frac{1}{2ie^{3}}\right)\right\} \Rightarrow I = \frac{\pi}{e^{3}}$$

تمرين46 احسب التكامل: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^3-1)}$

نلاحظ أن هذا التمرين ينطبق على الحالة الرابعة عندما يوجد أقطاب تقع على محور السينات وفوقه لهذا نلاحظ مايلي.

1 . حدود تكامل $(\infty، -\infty)$.

2 . الدالة $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$ دالة كسري جبري بسيط.

ينعدم مقامه من أجل جذور حقيقية وعقدية ودرجة بسيطة أقل من درجة مقامه بالرمز

3 . نختار الدالة $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$ وتكامل على $\overline{D}$ وهي نصف المستوي العلوي مع محور السينات فنجد:

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left[f(z),a_j\right] + \pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}[f(z),b_j]$$

المؤلفون : د.محمد نور شمه د. عازار الشايب د. شكري أبو عرابي

حيث a_j الأقطاب فوق ox , b_j الأقطاب على ox

$$z^3 - 1 = 0 \to z^3 = 1 = e^{i(2k\pi)}$$

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{3}} \qquad k = 0,1,2$$

$$z_0 = 1 \quad , \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \notin D$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),1] = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z), e^{i\frac{2\pi}{3}}] = \frac{1}{3} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$I = 2\pi i\left[\frac{1}{3} . e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right] + \pi i\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{3}\left(Cos\frac{4\pi}{3} - iSin\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{\pi i}{3} \quad I = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

تمرين47 احسب التكامل $I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1} dx$

الحل : لنحسب التكامل $I_p = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x^2+1} dx \qquad 0 < p < 2$

نلاحظ الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ يحقق $x^p f(x) \to 0$

$$x \to 0 \quad , \quad x \to \infty$$

نأخذ $f(z)=\frac{z^{p-1}}{z^2+1}$ أقطابه $z=\mp i$

لنجري بعض الإصلاحات التالية:

$$\operatorname{Res}[i]=-\frac{i(i)^{p-1}}{2}=-\frac{(i)^p}{2}=-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}p}}{2}$$

$$\operatorname{Res}[-i]=\frac{-(-i)^p}{2}=-\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{2}$$

$$I=-\frac{\pi}{Sinp\pi}.e^{-ip\pi}\left[-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}p}+e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{Sinp\pi}.\left(e^{i\frac{\pi}{2}p}+e^{-i\frac{\pi}{2}p}\right)$$

$$=\frac{\pi}{Sinp\pi}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}p}+e^{i\frac{\pi}{2}p}\right)$$

$$=\frac{\pi}{Sinp\pi}.2Cosp\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{Sinp\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{4/3}=\frac{\pi}{Sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

تمارين (4) إضافية

1 . أوجد رواسب الدوال التالية:

$$F_1(z)=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \quad ; \quad F_2(z)=e^z\csc^2 z$$

$$F_3(z)=\frac{\cot z\coth z}{z^3} \quad ; \quad F_4(z0=\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \qquad t>0$$

2 . احسب التكامل: $$I=\oint\limits_{|z|=z}\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$$

3 . احسب التكاملات الحقيقية التالية:

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} \quad ; \quad I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} \quad I_3=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2Cos\theta+Sin\theta}$$

$$I_4=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+bSin\theta} \qquad a>|b| \qquad I_5=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xSin\pi x}{x^2+2x+5}dx$$

$$I_6=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx \qquad 0<P<1 \qquad I_7=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Cos2\pi x}{x^2+x+1}dx$$

$$I_8=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x+x^2+1}$$

الفصل الخامس

التطبيقات المطابقة (المحافظة)

Conformal Mapping

التطبيق المطابق:

بفرض $w = f(z)$ <--- $z = x + iy$ حيث $f(z) = u + iv$

دالة تحليلية في المستوي Z إلى المستوي W معرف على منطقة R_1 ويأخذ قيمة من منطقة R_2 نلاحظ أن كلاً من قسميه الحقيقي والوهمي v, u دالة لـ y, x (أو θ, r إذا كان $z = re^{i\theta}$) أي:

$$U = U(x, y) \qquad , \qquad v = v(x, y)$$

وهما معادلتان لهذا التطبيق يربطان المستويين Z و W.

إذا قابل كل نقطة من المستوي W نقطة واحدة فقط من المستوي Z نسمي هذا التطبيق تقابل (غامر ومتباين).

وكما نعلم إن هذا التطبيق يحول بشكل عام منطقة مغلقة من المستوي Z إلى منطقة مغلقة من المستوي W، فإذا كانت a_{uv} مساحة المنطقة

في المستوي z وبالرمز $\Delta a_{u,v}$ مساحة المنطقة في المستوي W المقابلة وإذا كان لكل من v,u مشتقات جزئية مستمرة لأن الدالة $f(z)$ تحليلية عندها:

$$\lim_{\Delta a_{xy}} \frac{\Delta a_{u,v}}{\Delta a_{xy}} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$$

حيث:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{-\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left|f'(z)\right|^2$$

إن المحدد السابق هو يعقوبي التطبيق وعندما نستطيع حل المعادلتين:

$$u = u(x,y) \quad ; \quad v = v(x,y)$$

بالنسبة لـ y, x أي: $x = x(u,v) \quad ; \quad y = y(u,v)$

نحصل على ما يسمى بالتطبيق العكسي أو مقلوب $W = f(z)$ وإذا كانت المشتقات الجزئية لـ x و y بالنسبة لـ u,v مستمرة فإن يعقوبي التحويل $W = f(z)$ ويعقوبي التحويل المعاكس يرتبطان بالعلاقة:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

فإذا كان هذا اليعقوبي $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ غير معدوم أي $f'(z)\neq 0$ كان التطبيق غير شاذ نسمي النقاط التي ينعدم عندها $f'(z)$ بالنقاط الحرجة.

تعريف:

بفرض $W=f(z)$ تطبيقاً (تقابلاً) موضعياً وكان Γ_1,Γ_2 منحنيان في المستوي Z الزاوية بينهما α وصورتيهما Γ'_1,Γ'_2 في المستوي W وكانت الزاوية بينهما α أيضاً $W=f(z)$ تطبيقاً مطابقاً (محافظاً).

نظرية:

إذا كان $W=f(z)$ تحليلية هو ومشتقه $f'(z)\neq 0$ في المنطقة R من المستوي المركب فهو تطبيق مطابق.

البرهان: نعلم أن: $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{W-W_0}{z-z_0}=f'(z_0)$

ولهذا فإن: $\lim\limits_{z\to z_0}\left|\frac{W-W_0}{z-z_0}\right|=|f'(z_0)|$

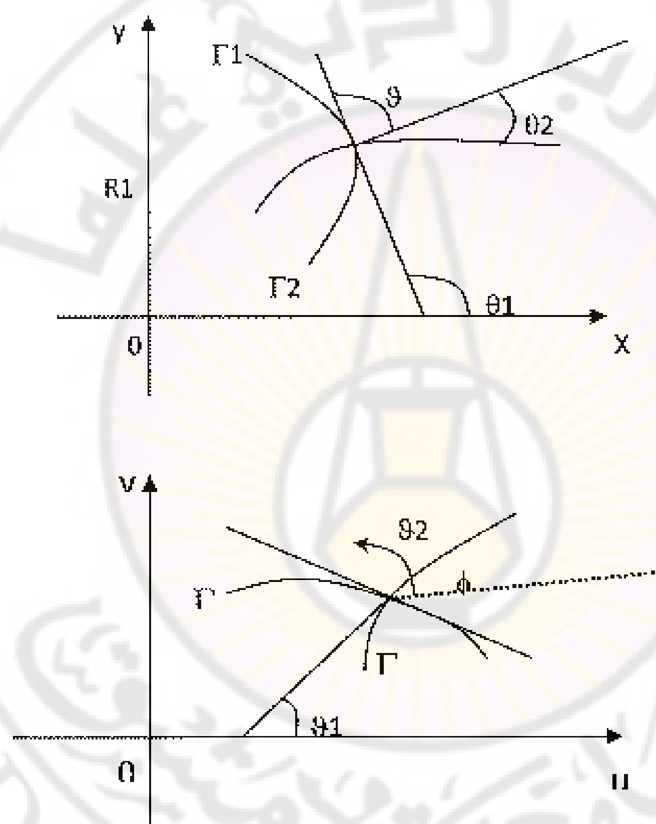
$$\lim_{z\to z_0}\arg\frac{W-W_0}{z-z_0}=\arg f'(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0}\arg(W-W_0)-\lim_{z\to z_0}(z-z_0)=\arg f'(z)$$

نلاحظ من الشكل على المنحنيين $\Gamma_1, \Gamma`_1$:

$$\varphi_1 - \theta_1 = \arg f`(z_0)$$

على $\Gamma_2, \Gamma`_2$ $\quad \varphi_2 - \theta_2 = \arg f`(z_0)$



ومنه: $\quad \varphi_1 - \theta_1 = \varphi_2 - \theta_2$

$$\phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \varphi$$

أي التطبيق يحافظ على الزوايا فهو مطابق.

بعض التحويلات الهامة (التطبيقات المطابقة):

1 . تطبيق الانسحاب: هو التطبيق المعرف كما يلي:

$$Z = x + iy = re^{i\theta} \Rightarrow$$
$$w = f(z) = z = \rho e^{i\theta}$$

نلاحظ أن هذا التطبيق هو تطبيق مطابق حسب النظرية السابقة فهو تحليلية لأنه كثير حدود من الدرجة الأولى ومشتقه لا ينعدم، و لهذا فإن الأشكال الناتجة بانسحاب هي أشكال متشابهة.

2 . تطبيق الدوران: يعرف هذا التطبيق كما يلي:

$$z \rightarrow W = f(z) = e^{i\theta_0}.z$$

أيضاً هذا التطبيق هو تطبيق مطابق والأشكال الناتجة عنه تدور بزاوية θ_0 (عكس عقارب الساعة) وعندما $\theta_0 < 0$ يتم ذلك وفق عقارب الساعة.

3 . تطبيق التحاكي: وهو التطبيق التالي: $z \rightarrow W = f(z) = az$

الأشكال الناتجة عن هذا التطبيق المطابقة هي أشكال متحاكية (متشابهة) وبالاتجاه المباشر لـ z عندما $a > 1$ وعكس ذلك عندما $a < 1$.

4 . التطبيق العكوس: $z \neq 0$ $z \to f(z) = \frac{1}{z}$ وهو أيضاً تطبيق مطابق.

5 . التطبيق الخطي: $z \to W = f(z) = \alpha z + \beta$

ونلاحظ أنه باختيار مناسب لـ β, α نحصل على هذا التطبيق من تحاك وانسحاب.

6 . التطبيق ثنائي الخطية: $z \to f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

بشرط $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ وهذا التطبيق أيضاً مطابق وهو يمثل كل التطبيقات السابقة باختيار مناسب للثوابت.

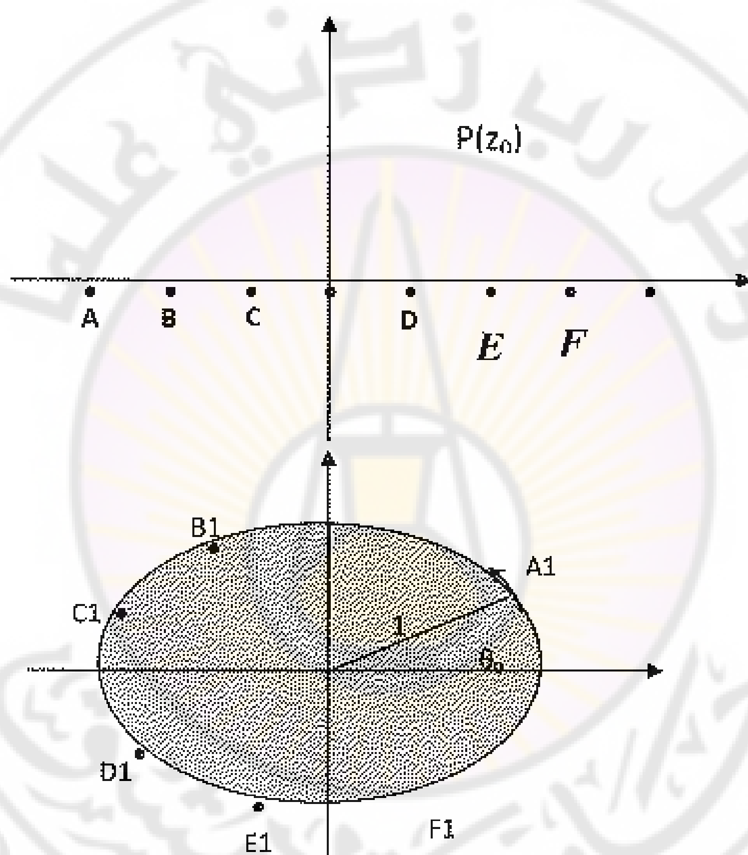
7 . تطبيق نصف المستوي العلوي على دائرة الوحدة.

يعرف هذا التطبيق كما يلي: $z \to W = f(z) = e^{i\theta_0}\left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right)$

نلاحظ في هذا التطبيق أن النقاط الواقعة فوق محور السينات تقابل بنقاط داخلية في دائرة الوحدة أما النقاط الواقعة على محور السينات فصورها تقع على محيط هذه الدائرة.

للبرهان على ذلك يكفي أن نبرهن: $|W| < 1$ و من أجل النقاط الواقعة فوق محور السينات $|W| = 1$ و من أجل النقاط الواقعة على محور السينات.

ملحوظة: إن المضلعات الصغيرة تقابل بمضلعات مشابهة لها أما المضلعات الكبيرة فلا تنطبق عليها هذه الخاصة والتطبيق الأخير يوضح ذلك.



تطبيق نصف المستوي العلوي على قرص دائرة الوحدة

بعض التطبيقات الخاصة:

1 . تطبيق قطاع من مستوي زاويته الرأسية $\frac{\pi}{m}$ على نصف المستوي العلوي: $z \to w = f(z) = z^m$

2 . تطبيق شوارتز . كرستوفل:

بفرض $w_1 m \to w_n$ مضلع في المستوي W زواياه الداخلية $\alpha_1\alpha_2 \to \alpha_n$ ويحد منطقة R.

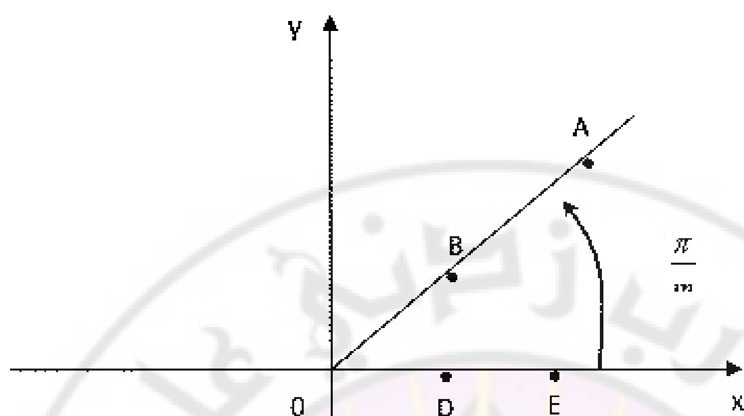
لنفرض أيضاً أن النقاط $W_1, W_2, .. W_n ..$ تمثل أشعة في المستوي W وهي تقابل النقاط $x_1,, x_2, .x_n ..$ الواقعة على المحور الحقيقي في المستوي Z.

إن هذا التطبيق الذي يطبق ذلك المضلع على النصف العلوي من المستوي Z يحقق مايلي:

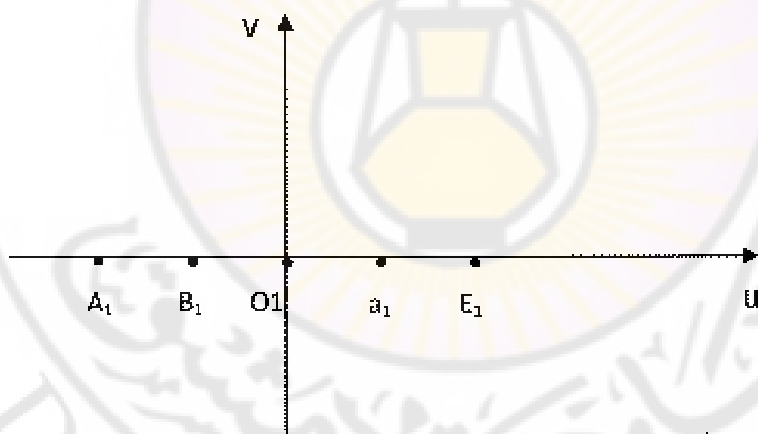
$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} .. \quad (z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$$

$$W = A\int (z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}} ... \ (z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} dz + B$$

حيث B, A ثوابت.



تطبيق قطاع زاوي $\frac{\pi}{m}$ على نصف المستوي العلوي



يلزم أن نلاحظ مايلي :

1 . يمكن اختيار أي ثلاث نقاط من $x_1, x_2, .. x_n ..$ كما نريد.

2 إن الثابتين H, A يحددان حجم وموضع واتجاه المضلع $W_1, W_2, .. W_n ..$.

3 . من المفيد اختيار إحدى النقاط $x_1,.,x_2,.,x_n,.$ في اللانهاية ولتكن x_n عندها يحذف العامل $(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$ من العلاقتين $w,\frac{dw}{dz}$

4 . المضلع المفتوح غير المنتهي يمكن اعتباره كنهاية لمضلع مغلق.

البرهان على علاقة تطبيق شوارتز . كرستوفل.

لأجل هذا يلزم التطبيق الحاصل من العلاقة:

$$\frac{dw}{dz}=A(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}\ldots\quad(z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$$

يطبق مضلع معطى في المستوي w على داخل المحور الحقيقي من المستوي z (أضلاع المضلع). من العلاقة $\frac{dw}{dz}$ نجد:

$$\arg dw=\arg dz+\arg A+\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\arg(z-x_1)+\ldots..+$$

$$+\left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)\arg(z-x_n)$$

عندما تتحرك z على ox من يسار x_1 على يمين x_1 عندها تتحرك W على المضلع (على ضلع المضلع) باتجاه W_1 وعندما تعبر x_1,z من اليسار إلى اليمين فإن $\theta_1=\arg(z-x_1)$ تتغير من π إلى o بينما كل

الحدود الأخرى $(z-x_2)$.......$(z-x_n)$ تبقى ثابتة وبهذا نجد أن $\arg dw$ يزداد بالرمز $\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\pi = \left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\arg(z-x_1)$ أي بالرمز $\alpha_1-\pi$ ويحدث نفس التغير بالنسبة لبقية العوامل عند المرور عبر $x_1,.,x_2,..x_n$.. [يعكس اتجاه عقارب الساعة (وذلك على المضلع)].

5 . برهن أن مجموع العوامل الواردة في تطبيقات كرستوفل . شوارتز :

$$\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right) \;,\; \left(\frac{\alpha_2}{\pi}-1\right) \;,\; \left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)$$

من أجل أي مضلع مغلق تساوي -2 .

إن مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع مغلق يساوي 2π وبالتالي:

$$(\pi-x_1)+(\pi-\alpha_2)+\ldots+(\pi-\alpha_n)=2\pi$$

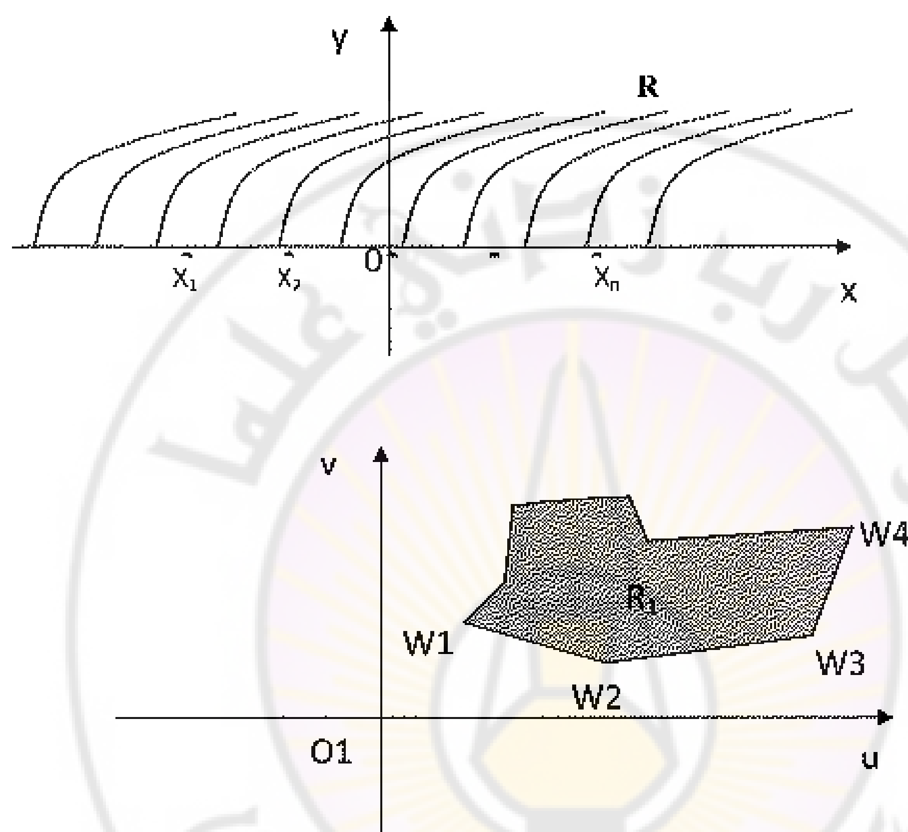
نقسم على π..

$$\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)+\left(\frac{\alpha_2}{\pi}-1\right)+\ldots\left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)=-2$$

6 . لنفرض في تطبيق شوارتز . كرستوفل أن $x_n=\infty$ عندها من العلاقة:

$$\frac{dw}{dz}=A(z-\alpha_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}\ldots\;(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$$

لنفرض $A = K/\ (-x_n)^{\left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)}$ حيث K ثابت.



تطبيق شوارتز ـ كرستوفل

وبإخراج $-x_n$ من العامل الأخير خارج قوس نجد:

$$\frac{dw}{dz} = K(z-x_1)^{\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)} \dots \ (z-x_{n-1})^{\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1\right)} \left(\frac{x_n - z}{x_n}\right)$$

وعندها $x_n \to \infty$ نجد:

$$\frac{dw}{dz} = K(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \dots (z-x_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1}$$

7 . $z \to w = f(z) = e^{\frac{\pi z}{a}}$

مثال :

$$A(x+ia) \to e^{\frac{\pi(x+ia)}{a}} = -e^{\frac{\pi x}{a}}$$

8 . التطبيق:

$$z \to W = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$B \approx z = -1 \to B_1 = a$$

$$D \approx z = 1 \to D_1 = a$$

$$C \approx z = iy \to C_1 = 0$$

تمارين محلولة

Solved Problems

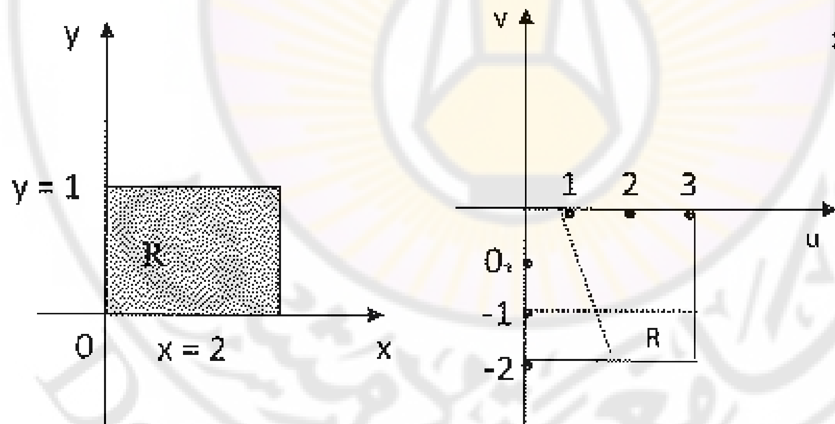
1 . ليكن R المستطيل المعين في المستوي z بالشكل:

$x = y = 0 \qquad x = 2 \qquad y = 1$

أوجد النطاق R_1 المقابل لـ R وفق التطبيقات التالية:

$W_1 = z + 1 - 2i$ .1
$W_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z$ .2
$W_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z + 1 + 2i$ .3

الحل:



1 . نلاحظ:

$W_1 = x + 1 + i(y - 2) \qquad u = x + 1 \qquad v = y - 2$

$$x=0\Rightarrow u=1;\ y=0\Rightarrow v=-2$$

$$x=2\Rightarrow u=3;\ y=1\Rightarrow v=-1$$

2. نكتب : $W_2=u+iv=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}z$

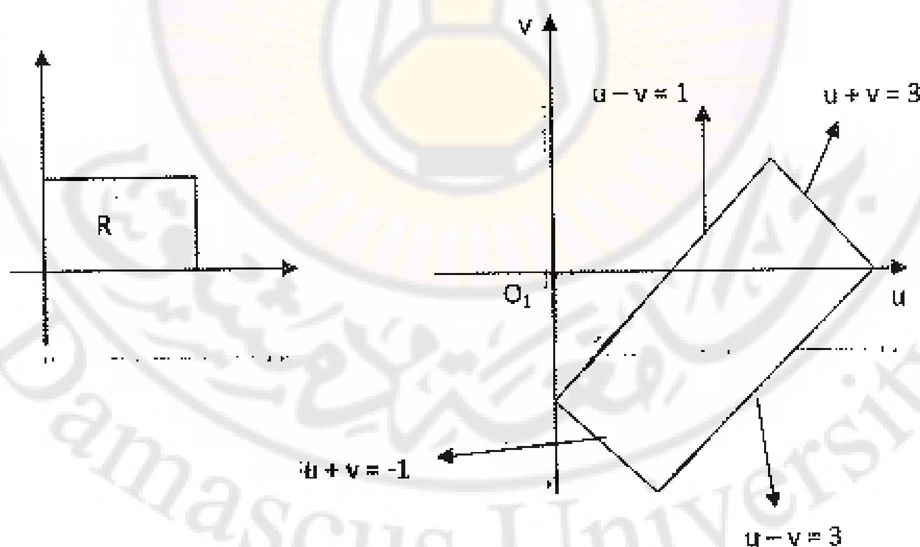
$$=x-y+i(x+y)$$

$$u=x-y \qquad v=x+y$$

$$x=0\Rightarrow u=-v \qquad y=0\Rightarrow u=v$$

$$x=2\Rightarrow u+v=4\ ,\ y=2\Rightarrow v-u=2$$

إن المقدار $W_3=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}+z(1-2i)$



نلاحظ أن: $v = x + y - 2$ $u = x - y + 1$

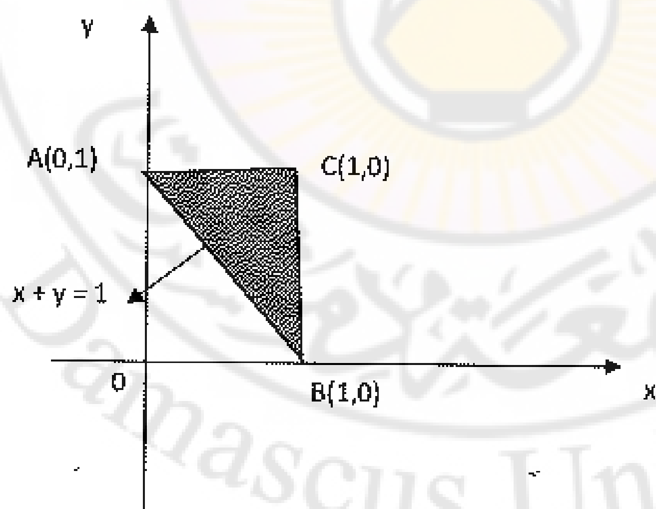
$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u + v = 1 \quad u - v = 3$$

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u + v = 3 \quad u - v = 1$$

2 . عين المنطقة المقابلة للمنطقة:

$$R : x = 1$$
$$y = 1; x + y = 1$$
$$w = z^2$$

وفق التطبيق: $W = u + iv = (x + iy)^2$



الحل: $= x^2 - y^2 + 2ixy$

$$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 1 - y^2 \quad v = 2y$$

ومنه $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ و كذلك $y = 1 \Rightarrow u = x^2 - 1 \quad v = 2x$

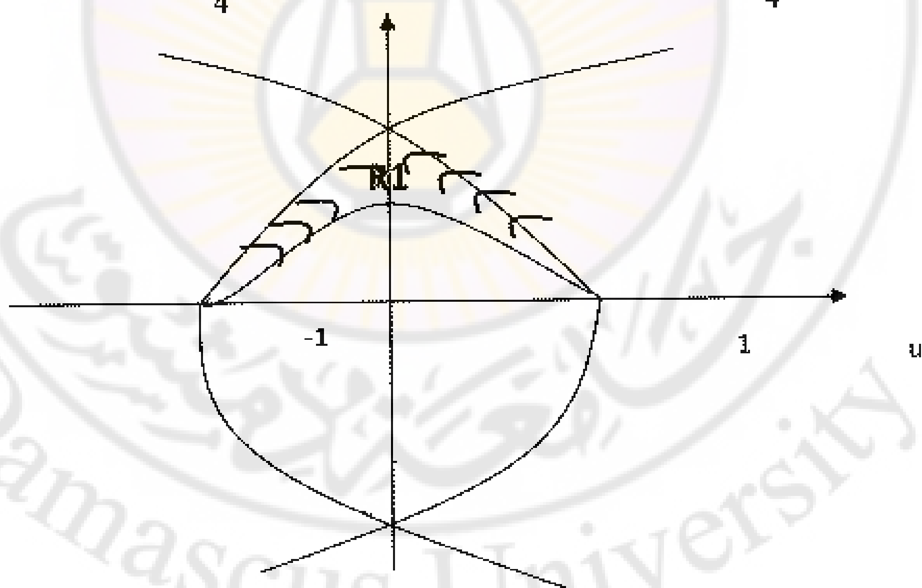
ومنه $u = \frac{v^2}{4} - 1$ وكذلك

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow u = x^2 - (1-x)^2 2x - 1$$

$$v = 2x(1-x) = 2x - 2x^2$$

ومنه $v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$ و $v = \frac{1 - u^2}{2}$

$u = \frac{v^2}{4} - 1$ v $u = 1 - \frac{v^2}{4}$



3. أوجد التطبيق ثنائي الذي ينقل النقاط:

$$Z_1 = 0 \quad , \quad Z_2 = -i \quad , \quad Z_3 = -1$$

إلى النقاط: $W_1 = i, \quad W_2 = 1, \quad W_3 = 0$ على الترتيب.

الحل:

$$W = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

$$W_1 = \frac{\alpha (0) + \beta}{\gamma (0) + \delta} = i \qquad \beta = i\delta$$

$$W_2 = \frac{\alpha (-i) + \beta}{\lambda (-1) + 8} = 1 \qquad -i\gamma + \delta = -i\alpha + \beta$$

$$W_3 = \frac{\alpha (-1) + \beta}{\gamma (-1) + \delta} = 0 \qquad \alpha = \beta$$

وبحل جملة المعادلات السابقة نجد أحد المجاهيل اختياري وليكن α

عندها نجد: $\beta = \alpha, \quad \delta = -i\alpha \quad , \quad \gamma = i\alpha$

$$W = -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

4. أوجد النقاط غير المتغيرة في التطبيق التالي: $W = \dfrac{2z-5}{z+4}$

الحل: النقطة الثابتة تحقق $z \to z$

$$z = \frac{2z-5}{z+4}$$

$$z^2 + 4z = 2z - 5$$

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$

$$z_1 = -1-2i \qquad z_2 = -1+2i$$

النقاط الثابتة هي z_2, z_1 .

5 . ليكن Γ منحنياً في المستوي Z معطى بشكل وسيطي

$$x = f_1(x), y = f_2(t)$$

برهن أن هذا المنحني يمكن أن يطبق على محور السينات وفق

التطبيق: $Z = f_1(w) + if_2(w)$

لنفرض $z = x + iy$ و $W = u + iv$

عندها نجد: $x + iy = f_1(u+iv) + if_2(u+iv)$

من أجل محور السينات $v = 0$

$$x + i4 = f_1(u) + if_2(u)$$

أي: $y = f_2(u) \quad x = f_1(u)$

وهي تمثل معادلة المنحني Γ

تطبيق: لنفرض $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ قطعاً ناقصاً في المستوي Z عندها هناك تطبيق يطبق هذا القطع على محور السينات وهذا التطبيق هو:

التمثيل الوسيطي للقطع هو $x = a\,Cos\,t$ ، $y = bS\text{int}$

إذاً التطبيق المطلوب. $z = a\cos w + ib\,Sinw$.

تمارين (5)

1 . ليكن لدينا المثلث Δ في المستوي z المعين بالأشعة $i, 1-i, 1+i$

أوجد صورته Δ_1 وفق التطبيقات.

$$W_1 = 3z + 4 - 2i \quad ; \quad W_2 = iz + 2 - i \quad ; \quad W_3 = 5e^{i\frac{\pi}{3}} z - 2 + 4i$$

2 . أوجد صورة المثلث المسابق الذكر في المسألة السابقة وفق التطبيقات:

$$W_1 = z^2 \quad ; \quad W_2 = iz^2 + (2-i)z \quad ; \quad W_3 = z + \frac{1}{z}$$

3 . بين أن التطبيق: $z \to W = ze^{-\alpha} + z^{-1}e^{\alpha}$

حيث α حقيقي ينقل داخل الدائرة $|z| = 1$ إلى خارج قطع ناقص.

4 . عين صورة المستقيم $x + y = 1$ في المستوي z وفق التطبيقات.

$$W_1 = z^2 \quad , \quad W_2 = \frac{1}{z}$$

5 . أوجد التطبيق الخطي (ثنائي الخطية) الذي يقابل النقاط:

$$z_1 = i \quad , \quad z_2 = -1 \quad , \quad z_3 = 1$$

بالنقاط: $W_1 = 0 \quad , \quad W_2 = 1 \quad , \quad W_3 = \infty$


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الباب الثاني

يتضمن :

6- نشر الدوال وسلسلة وتكامل فورييه

7- الدوال الخاصة

8- تحويلات لابلاس و تطبيقاتها

الفصل السادس

نشر الدوال وسلسلة وتكامل فورييه

Functions Expansion according to Fourier Series and integral

مقدمة:

واجه العلماء نتيجة أبحاثهم ضرورة نشر بعض التوابع التي لا تحقق هذه الشروط وخاصة في مجالات الهندسة بفروعها المختلفة ولقد استطاع العالم الفرنسي جوزيف فورييه (1768 . 1830) وذلك عند دراسة مسألة انتقال الحرارة تمثيل بعض من هذه التوابع (محققة لشروط خاصة سنعرفها لاحقاً) وفق سلسلة دوال بسيطة مثلثيه. وجدنا من خلال دراستنا للتحليل الرياضي أنه يمكن نشر الدوال وفق سلسلة تايلور (أو ماك لوران) وذلك ضمن شروط خاصة (متعلقة بالاستمرار والاشتقاق) تحققها الدوال ومشتقاتها.

تعريف 1: نقول عن دالة $f(x)$ معرفة على الفترة $]\alpha,\beta[$ إنها ملساء إذا كانت مستمرة هي ومشتقتها $f(x)$ على الفترة $]\alpha,\beta[$ أما إذا كانت $f(x)$ معرفة على فترة $]\alpha,\beta[$ يمكن تقسيمها إلى عدد منته من الفترات بحيث تكون $f(x)$ ملساء على كل فترة عندها فإن $f(x)$ تسمى ملساء جزئياً.

ملحوظة 1:

نسمي النقطة x_0 شاذة على منحي دالة $f(x)$ تلك النقطة التي لا يكون فيها المشتق الأول موجوداً أو أن الدالة تكون فيها غير معرفة وهناك أنواع كثيرة للنقاط الشاذة نذكر منها النقاط المضاعفة والمنعزلة ونقاط التراجع (يمكن التعرف على هذه النقاط من أي كتاب في التحليل الرياضي ورسم الدوال).

تعريف 2:

تكون الدالة $f(x)$ دورية إذا حققت الشرط $n \in Z \quad F(x) = F(x+nt)$ حيث T عدد حقيقي.

تعريف 3:

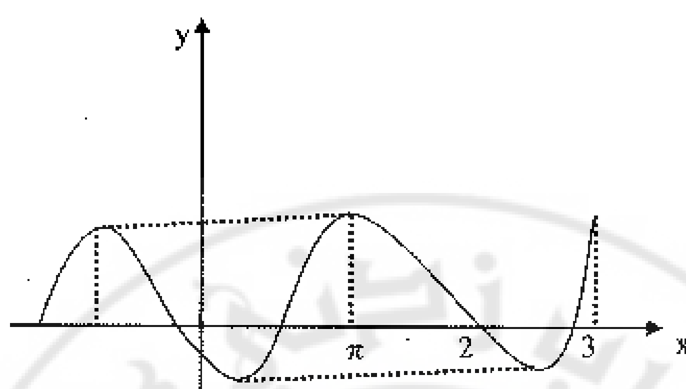
نقول عن دالة $F(x)$ أنها تحقق شروط دير يخليه إذا تحقق مايلي:

1. $f(x)$ معرف على الفترة : $c > 0 \;;\; c < x < c+2l$

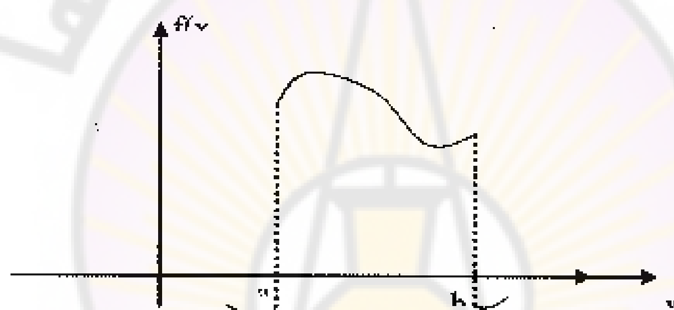
2. $(F`(x), F(x$ مستمران جزئياً على $]c, c+2l[$

3. $((F(x) = F(x+k(2l)$ حيث k عدد صحيح.

خطوط بيانية لتوابع مستمرة ومستمرة جزئياً.



دالة ملساء جزئياً ومستمرة



دالة ملساء مستمرة

لقد زعم فورييه أن الدالة المحققة لشروط دير يخليه تمثل وفق السلسلة:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\left(\frac{n\pi}{l}\right)+b_n Sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)x \qquad (2\text{-}1)$$

حيث $c< x < c+2l$ (قد توجد نقاط انقطاع) . وأن الثوابت $b_n,\ a_n,\ a_0$ تعطى بالعلاقات:

$$\left.\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)dx\\ a_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\,Cos\frac{n\pi}{c}xdx\\ b_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\,Sin\frac{n\pi}{c}xdx\end{aligned}\right\}. \qquad (2\text{-}2)$$

وأما في نقاط الانقطاع فيمكن أن يعرف $F(x)$ كمايلي:

$$\frac{1}{2}\{F(x+0)-F(x-0)\}$$

حيث x نقطة الانقطاع (من النوع الأول) والمقصود $x+0$ أي السعي إلى x من ناحية اليمين و $x\text{-}0$ السعي لـx من ناحية اليسار وفي المسائل نختار الثابت C بحيث تنطبق حدود التكامل في العلاقات (2.2) على بداية ونهاية الفترة (فترة الدور).

إثبات ادعاء فورييه:

لنكامل العلاقة (1.1) على فترة الدور $T = 2l$:

$$\int_c^{c+2l} F(x)\,dx = \int_c^{c+2l}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^{c+2l} a_n Cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^{c+2l} b_n Sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

وبملاحظة أن دور كل من $Cos\frac{n\pi}{l}x$ و $Sin\frac{n\pi}{l}x$ هو $T = \frac{2l}{n}$ نجد أننا

تكاملها ضمن مضاعفات الدور $2l$ وبالتالي:

$$a_n\int_c^{c+2l} Cos\frac{2\pi}{l}xdx = b_n\int_c^{c+2l} Sin\frac{n\pi}{l}xdx = 0$$

لهذا نجد: $$\int_c^{c+2l} F(x)dx = \frac{a_0}{2}[x]_c^{c+2l}$$

ومنه: $$a_0 = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\,dx$$

كذلك لنضرب العلاقة (2.1) بـ $Cos\frac{m\pi}{l}x$ ثم نكامل على فترة الدور فنجد:

$$\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{m\pi}{l}xdx = \frac{a_0}{2}\int_c^{c+2l}\cos\frac{m\pi}{l}xdx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_c^{c+2l}\cos\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_c^{c+2l} Sin\frac{n\pi}{l}x\,Cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

نلاحظ أن: $$a_0\int_c^{c+2l} Sin\frac{m\pi}{l}xdx = 0$$

لأنه تكامل دالة مثلثية على مضاعفات الدور:

$$b_n\int_c^{c+2l} Sin\frac{m\pi}{l}xCos\frac{m\pi}{l}xdx =$$

$$\frac{b_n}{2}\int_c^{c+2l}[Sin(n+m)\frac{\pi}{l}x + Sin(n-m)\frac{\pi}{l}x]dx =$$

$$\frac{b_n}{2}\int_c^{c+2l} Sin(n+m)\frac{\pi}{l}x + \frac{b_n}{2}\int_c^{c+2l} Sin(n-m)\frac{\pi}{l}xdx$$

لأن كل منهما تكامل دالة دورية على مضاعفات الدور ويساوي الصفر.

$$a_n \int_c^{c+2l} Cos\frac{m\pi}{l}x \quad Cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$\frac{a_n}{2}\int_c^{c+2l}[Cos(m+n)\frac{\pi}{l}xdx+\frac{a_n}{2}\int_c^{c+2l}Cos(m-n)\frac{\pi}{l}xdx$$

التكامل الأول معدوم لأنه تكامل دالة دورية على فترة مضاعفات الدور أما التكامل الثاني فهو كذلك إلا عندما $m = n$ عندها يصبح مساوياً لـ:

$$\frac{a_n}{2}\int_c^{c+2l}Cos(0)dx = \frac{a_n}{2}[x]_c^{c+2l} = a_n l$$

ومنه:
$$a_n l = \int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx =$$

أي:
$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx =$$

وهي العلاقة المطلوبة ، و بنفس الطريقة لو ضربنا العلاقة (2-1) بـ $Sin\frac{m\pi}{l}$ ثم كررنا ماسبق تحصل على: $b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l}F(x)Sin\frac{n\pi}{l}dx$

ملحوظة 2: نسمي الثوابت المحسوبة في العلاقات (2.2) بثوابت أولر وفيها $n= 1,2,3...$.

مثال (1):

انشر الدالة الدورية $F(x)$ المعرف كمايلي: $F(x)=\begin{cases} x & a<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$

حسب سلسلة فورييه.

الحل: إن المقصود بالسؤال هو التالي:

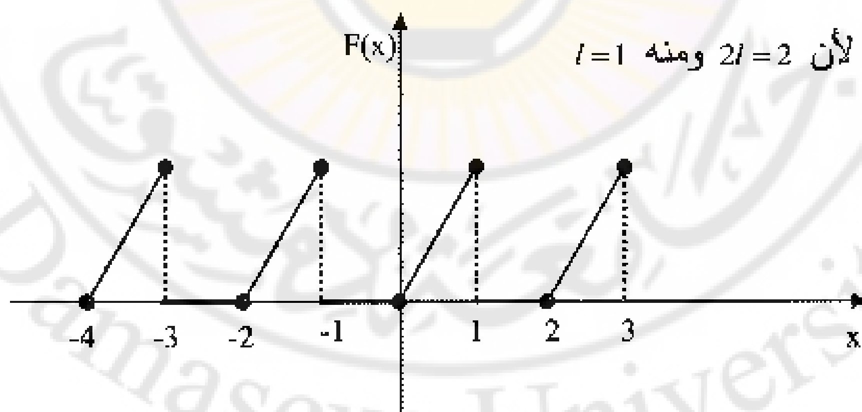
1 . التحقق من شروط دير يخليه.

2 . الرسم.

3 . تعيين الثوابت b_n, a_n, a_0.

الدالة $F(x)$ ومشتقتها مستمرتان جزئياً على فترة الدور $T=2$ ولأن الدالة دورية فرضاً لهذا فإن $F(x)$ تحقق شروط دير يخليه ويمكن نشره وفق فورييه كمايلي: $F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi}{1}x+b_n\, Sin\frac{n\pi}{1}x$

لأن $2l=2$ ومنه $l=1$



$$a_0 = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)dx = \int_0^l x dx + \int_1^2 0.dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x) Cos\frac{n\pi}{l} x dx$$

$$a_n = \int_0^1 x\cos n\pi x dx + \int_1^2 0.\cos n\pi . dx$$

$$x = u \qquad dx = du$$

$$Cos n\pi x d = dv \qquad v = \frac{1}{n\pi} Sin\ n\pi x$$

$$a_n = \frac{x Sin\ n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 Sin\ n\pi x\ dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[Cos\ n\pi x \Big|_0^1 \frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1\right]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{2}{n^2\pi^2} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\ Sin\frac{n\pi}{l} x dx = \int_0^1 x Sin\frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= \int_0^1 x Sin\frac{n\pi}{l} x dx + \int_1^2 0.Sin\frac{n\pi}{l} x dx$$

$$x = u \qquad du = dx$$

$$Sin\frac{n\pi}{l}xdx = dv \qquad v = -\frac{1}{n\pi}Cos\ n\pi x$$

$$b_n = \frac{-xCos\ n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 Cos\ n\pi x dx$$

$$b_n = \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2.\pi^2}Sin\ n\pi x\Big|_0^1$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

وبذلك نجد:

$$F(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]\,Cos\ n\pi x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}Sin\ n\pi x$$

ملحوظة 3: إن شروط دير يخليه هي شروط كافية للنشر وغير لازمة.

حالة خاصة: عندما يكون دور الدالة $T = 2\pi$ يصبح شكل سلسلة فورييه كما يلي:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n Cosnx + b_n Sin\ nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}F(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}F(x)Conxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}F(x)Sin\ nx\ dx$$

مثال 2: انشر الدالة الدورية $F(x)$ المعرف كمايلي:

$$F(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<\pi \\ 1 & \pi<x<2\pi\end{cases}$$

وارسم الدالة على الفترة $(-3\pi,3\pi)$.

الحل: نلاحظ أن الدالة دورية فرضاً دوره $T=2\pi$ وهو ثابت على مجال ولهذا فهوَ ومشتقه مستمران جزئياً فالدالة تحققَ شروط دير يخليه لهذا يمكن نشرها وفق فورييه كما يلي:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\, Cosnx+b_n Sin\, nx$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_c^{c+2\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(-1)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(1)dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-x\Big|_0^{\pi}+x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\pi+(2\pi-\pi)\right]=\frac{1}{\pi}(0)=0$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_c^{c+2\pi}F(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-Cosnxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}Cosnxdx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[Sinnx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\left[Sinnx\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{-1}{n\pi}(0) + \frac{1}{\pi n}(0) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2\pi} F(x)\, Sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1) Sin\ nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(1) Sin\ nx dx$$

$$b_n = \frac{+1}{n\pi} Conx \Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\quad Cosnx \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(Con\pi -) - \frac{1}{n\pi}(1 - Cosn\pi) = \frac{2(-1)^n}{\pi n} - \frac{2}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{bmatrix} 0 & n = 2k \\ \frac{-4}{n\pi} & n = 2k-1 \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)\pi} Sin(2n-1)x$$

$$\pi < x < 2\pi \quad \text{أو} \quad 0 < x < \pi$$

الدوال الفردية والدوال الزوجية ونشر فورييه:

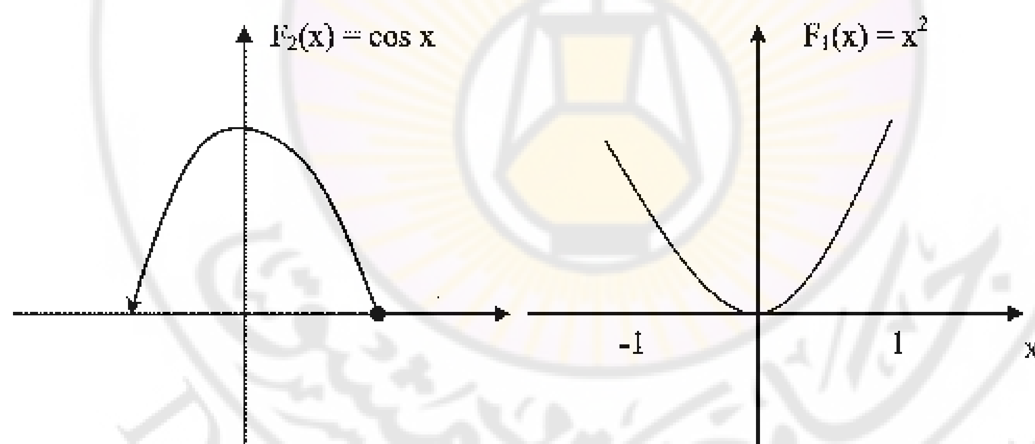
(ما يسمى النشر على نصف الدور) [*Half Renege Expansion*]

نسمي الدالة $f(x)$ المعرفة فترة متناظرة بالنسبة لـ oy على دالة زوجية إذا حققت العلاقة :

ونسميها دالة فردية إذا حققت العلاقة:

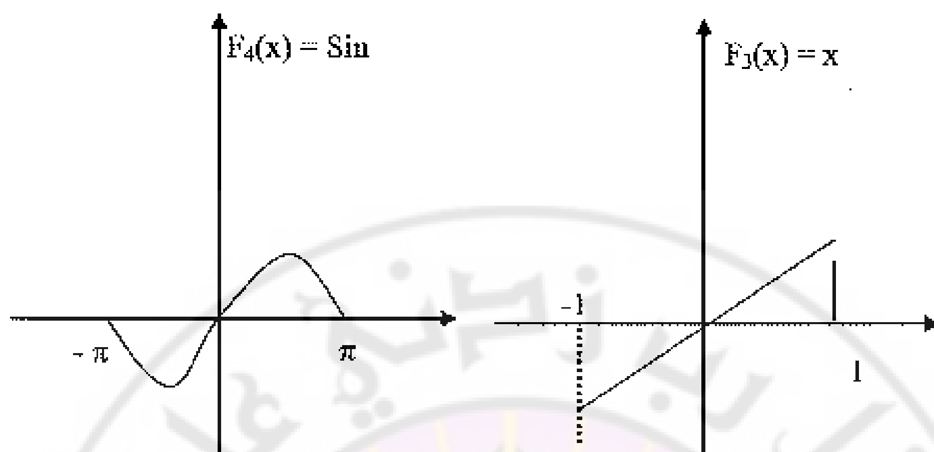
$$\forall \quad x \in]-l,l[\quad ; \quad F(x) = F(-x) \; \forall \quad x \in]-l,l[\quad ; \quad F(x) = -F(-x)$$

بعض بيانات دوال فردية أو زوجية



$f1(x) = x^2$ $\quad f_2(x) = \cos x$ حيث إن f_2, f_1 دالتان زوجيتان

وأن : $-1 \le x \le 1$ $\quad \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



هناك دوال معرفة على مجال متناظر غير فردية وغير زوجية مثل:

$$F(x)=x^2+1+x$$

لكن كل دالة معرفة على مجال متناظر هي مجموع دالتين إحداهما فردية والأخرى زوجية $F(x)=\frac{F(x)+F(-x)}{2}+\frac{F(x)-F(x)}{2}$

نلاحظ أيضاً أنه إذا كانت الدالة $F(x)$ زوجيةً فإن:

$$\int_{-l}^{l}F(x)\,Sin\frac{n\pi}{l}xdx=0$$

أي أن سلسلة فوريه للدالة الزوجية لا تحوي حدوداً بـ $Sin\frac{n\pi}{l}x$

كذلك بنفس الطريقة إذا كانت $F(x)$ دالةً فرديةً فإن:

$$\int_{l}^{l}(x)dx=\int_{-l}^{l}F(x)\,Cos\frac{n\pi}{l}xdx=0$$

والسلسلة الناتجة (سلسلة فورييه) لا تحوي حداً ثابتاً ولا حدود فيها $Cos\frac{n\pi}{l}x$. مما سبق يمكننا عمل التالي: ليكن $F(x)$ دالةً ما معرفة على الفترة $(0,l)$ عندها يمكننا نشر هذه الدالة وفق سلسلة جيوب فقط أو وفق سلسلة جيوب تمام وفق الطريقة الآتية:

ملاحظة 4: الدالة $F(x)$ قد لا تكون دوريةً.

1 . النشر وفق سلسلة جيوب تمام:

لنفرض أن $F(x)$ دالة ما غير دورية معرفة على الفترة $(0,l)$ ولنفرض أننا نريد نشر وفق فورييه بحيث إن السلسلة لا تحوي إلا حدوداً فيها جيوب تمام عندما نقوم بالعملية التالية:

لنحدد الدالة $F_1(x)$ المعرفة على الفترة $(-l,l)$ بالشكل التالي:

$$F_1(x)=\begin{cases} F(x) & 0<x<l \\ F(x) & -l<x<0 \end{cases}$$

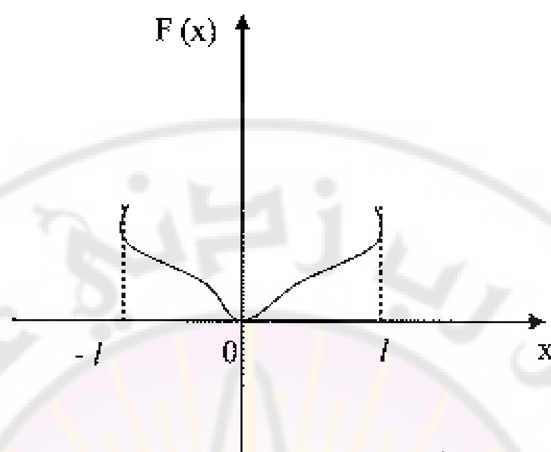
عندها نجد أن الدالة $F(x)$ هي دالة زوجية وهي تحقق شروط فورييه فرضاً

$$F_1(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nCos\frac{n\pi}{l}x$$

$-l<x<0$ أو $0<x<l$

(فيما إذا اعتمدنا أن دور الدالة $F(x)$ هو $0<x<l$ و بما أن $F_1(x)=F(x)$ على الفترة $(0,l)$ لهذا يكون:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1=n}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi}{l}x \qquad (2\text{-}3)$$



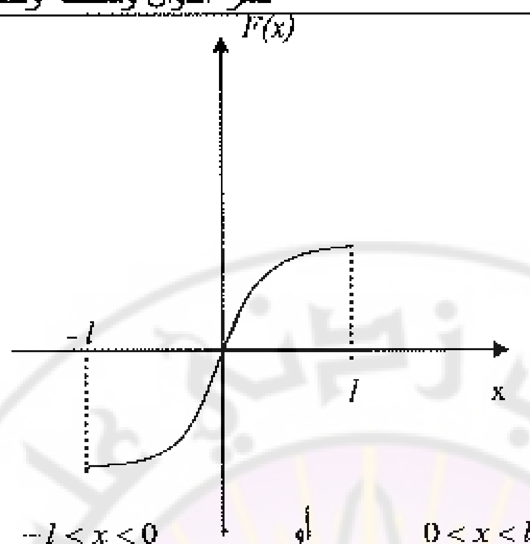
2. النشر وفق سلسلة جيوب:

لنفرض $F(x)$ دالة معرفة على $(0,l)$ ونريد نشره وفق فوريه وهو غير دورية عندها نحدد هذه الدالة على الفترة $(-l,l)$ كما يلي:

$$F_1(x)=\begin{cases}F(x)\leftarrow 0<x<l\\ -F(x)\leftarrow -l<x<0\end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة الجديدة $F_1(x)$ هي دالة فردية لهذا إذا افترضنا أنها دورية ودورها $2l$ نجد أنه يمكن نشرها وفق فوريه (بفرض أن $F_1(x)$ ومشتقتها مستمرتان جزئياً) وفق سلسلة جيوب لأنها فردية وبالتالي :

$$F_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$



وبما أن $F(x)$ يطابق $F_1(x)$ على الفترة $(0، l)$ عندها يكون:

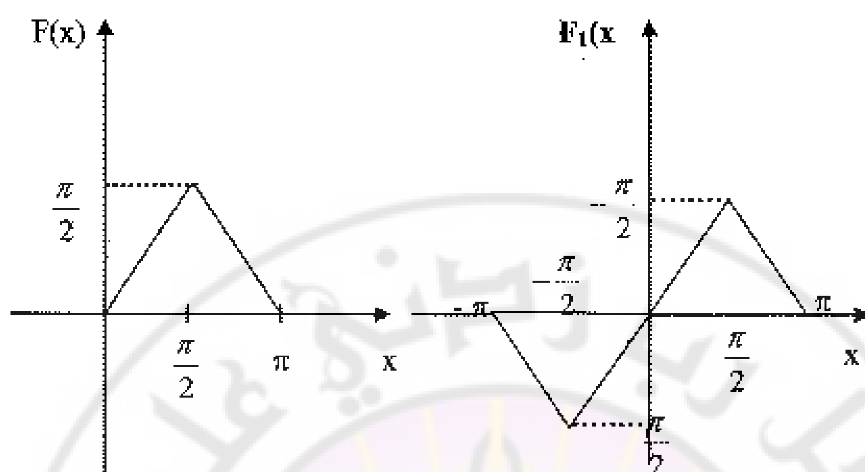
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi}{l} x. \qquad (2-4)$$

ملحوظ 5:

في التوابع الزوجية يكون بيان الدالة متناظرة بالنسبة لمحور العينات أما في حالة التوابع الفردية فإن البيان يكون متناظراً بالنسبة للمبدأ.

مثال 3: ا

نشر الدالة $F(x)$ المعرفة كما يلي: $F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$



وفق سلسلة جيوب ثم وفق سلسلة جيوب تمام النشر وفق سلسلة جيوب لدينا الدالة $F_1(x)$ دالة دورية (نحن نريده هكذا) دوره 2π فردية ويحقق شروط دير يخليه لهذا يكون: $F_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\, nx$

وبالتالي: $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_1(x)\, Sin\, nx\, dx$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x Sin nx dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x) Sin\, nx dx$$

في التكامل الأول نفرض $x=u$ و $dv = Sin\, nx\, dx$ وفي التكامل الثاني نفرض (π-x) u و $dv = Sin\, nx\, dx$ ونكامل بالتجزئة فنجد:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{Sin nx}{n}\left|_0^{\frac{\pi}{2}}\right.+\right.$$

$$\left[-\frac{(\pi-x)}{n}Cosnx\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{Sinnx}{n^2}\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]\Bigg\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\frac{\pi}{2}Cos\frac{n\pi}{2}-0}{n}+\frac{Sin\frac{\pi}{2}x-0}{n}\right.$$

$$-\frac{0-\frac{\pi}{2}Cos\frac{2\pi}{2}}{n}-\frac{Sinn\pi-Sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

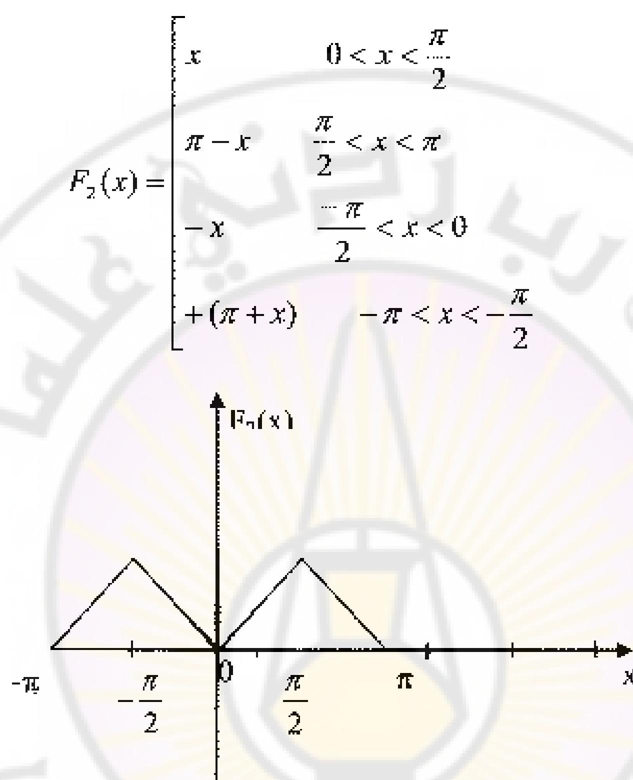
$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2Sin\frac{2\pi}{2}}{n^2}\right]=\frac{4}{\pi n^2}Sin\frac{n\pi}{2}$$

نعوض فنجد:

$$F_1(x)=F(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{Sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}Sinnx$$

$$0<x<\frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \frac{\pi}{2}<x<\pi$$

2 . من أجل إيجاد سلسلة جيوب التمام نمدد الدالة $F(x)$ على الفترة $(-l,l)$ كمايلي:



$$F_2(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \frac{\pi}{2}<x<\pi \\ -x & \frac{-\pi}{2}<x<0 \\ +(\pi+x) & -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

عند ذلك تكون الدالة $F_2(x)$ محققاً لشروط فوريه دوره $\pi 2$ وهو زوجي ولهذا يكون:

$$F_2(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1=n}^{\infty}a_n Cosnx$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{-(\pi - x)^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{\gamma} - 0 - 0 + \frac{\pi^2}{\gamma} \right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4} \right] a_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} xCosnxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)Cosxdx \right] = \frac{2}{\pi} I_1 + \frac{2}{\pi} I_2$$

حيث: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xCosnxdx \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)Cosnxdx$

في التكامل الأول نفرض $x = u$ ومنه $dx = du$

$$Cos\ noc.dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{n} Sin\ nx$$

وفي التكامل الثاني نفرض $\pi - x = u$ ومنه $du = -dx$

ومنه $v = \frac{1}{n} Sin\ nx \Leftarrow Cos(nx) = dv$

$$I_1 = \frac{x}{n} Sinnx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sinnxdx$$

$$= \frac{\pi Sin \frac{n\pi}{2}}{2n} - 0 + \frac{1}{n^2} Cosnx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = \frac{\pi}{2n} Sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}(Cosn\pi - 1) \qquad (1)$$

$$I_2 = \frac{(\pi - x)}{n} Sinn\pi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Sinnxdx = -\frac{\pi}{2n} Sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} Cosnx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$I_2 = -\frac{\pi}{2n} Sin\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\left(Cosn\pi - Cosn\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} I_1 + \frac{2}{\pi} I_2$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2n} Sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}(Cosn\pi - 1)\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\pi}{2n} Sin\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}(Cos4\pi) + \frac{1}{n^2} Cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2} Cos\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{2}{\pi n^2} Cos\frac{n\pi}{2}$$

$$F_2(x) = F_1(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{1=n}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2} Cos\frac{n\pi}{2} Cos4\pi - \frac{1+(-1)^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \qquad \text{أو} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

النشر العقدي لسلسلة فورييه:

لقد وجدنا أن الدالة $F(x)$ المحققة لشروط دير يخليه (الكافيه) يمكن تمثيلها وفق سلسلة فورييه كمايلي:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi}{l}x+b_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

وذلك على فترة دور الدالة $F(x)$.

إذا استخدمنا علاقات أولر الرابطة بين التوابع المثلثية و الأسية نجد:

$$Sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}-e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2i}$$

$$Cos\frac{n\pi}{l}x=\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}+e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2}$$

نبدل في سلسلة فوريه:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}+e^{-i\frac{n\pi}{l}}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}-e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2i}\right)\right]$$

$$F(x)=\frac{a_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{l}x}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{l}x}$$

إذا استخدمنا الاصطلاحات التالية:

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} \\ C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ C_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (2-5)$$

نجد:
$$F(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} + C_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{l}x}$$

أي:
$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \qquad (2-6)$$

وهو نشر فوريه العقدي.

حتى يتم النشر يلزم تعيين C_n نلاحظ من علاقات تعريف C_0 ، C_n ، C_{-n}

أن:-
$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x) Cos \frac{n\pi}{l} x dx - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{l}\int_c^{c+2l} F(x) Sin \frac{n\pi}{l} x dx \right\}$$

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_c^{c+2l} F(x)\left[\cos\frac{n\pi}{l}x - iSin\frac{n\pi}{l}x\right]dx$$

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_c^{c+2l} F(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx. \qquad (2-7) \qquad n = 0,1,2,..$$

إن العلاقات (2.5) تسمح بالانتقال من النشر الحقيقي إلى النشر العقدي

يمكننا الانتقال أيضاً من النشر العقدي إلى الحقيقي بملاحظة أن:

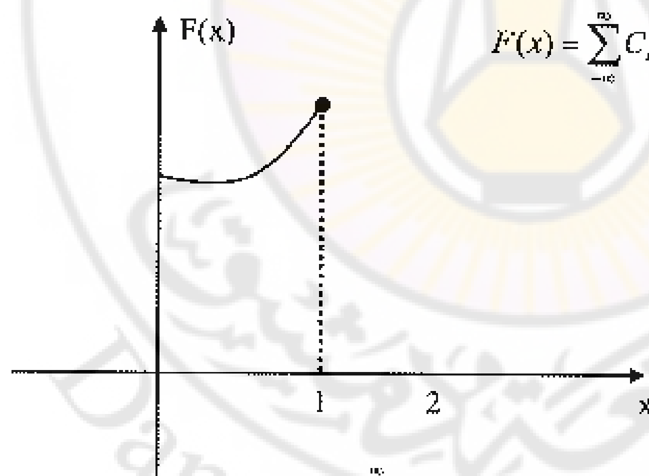
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 2C_0 \\ a_n = C_n + C_n \\ b_n = i(C_n - C_{-n}) \end{array}\right\} \qquad (2-8)$$

مثال 4: أوجد نشر فوريه العقدي للدالة $F(x)$ المعرفة كمايلي:

$$F(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

حيث $F(x) = F(x+2)$

الحل : نلاحظ أن الدالة $F(x)$ دورية دورها $T = 2l = 2$ كذلك الدالة ومشتقتها مستمرتان على فترة الدورة لهذا يمكن نشره وفق نشر فوريه العقدي. $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}$



عندما $l = 1$ يكون : $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$

$0 < x < 1$ أو $1 < x < 2$

$$C_n = \frac{1}{l}\int_0^{2=2l} F(x).e^{i\frac{n\pi}{l}x}dx$$

$$C_n = \int_0^1 e^x.e^{in\pi x}dx = \int_0^1 e^x.e^{-in\pi x}dx$$

$$= \int_0^1 e^{(1-in\pi)x}dx = \frac{1}{1-in\pi}.e^{(1-in\pi)x}\Big|_0^1$$

$$C_n = \frac{e^{1-in\pi}-1}{1-in\pi} = \frac{e(Cosn\pi - iSinn\pi)-1}{1-in\pi}$$

$$C_n = \frac{(-1)^n e-1}{1-in\pi}$$

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n e-1}{1-in\pi}.e^{in\pi x}$$

$0 < x < 1$ أو $1 < x < 2$

لإيجاد النشر الحقيقي نستخدم العلاقات:

$$a_0 = 2\,C_0$$

$$a_n = C_n + C_{-n}$$

$$b_n = i\,(C_n - C_{-n})$$

$$a_0 = 2(e-1)$$

$$a_n = \frac{(-1)^n e-1}{1-in\pi} + \frac{(-1)^{-n} e-1}{1+in\pi}$$

$$=\left[(-1)^n e-1\right]\left[\frac{1}{1-in\pi}+\frac{1}{1+in\pi}\right]=\frac{\left[(-1)^n e-1\right]\left[1+in\pi+1-in\pi\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$a_n=\frac{2\left[(-1)^n e-1\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n=i(C_n-C_{-n})=i\left[\frac{(-1)^n e-1}{1-in\pi}-\frac{(-1)^n e-1}{1+in\pi}\right]$$

$$=\frac{i\left[(-1)^n e-1\right]\left[1+in\pi-1+in\pi\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n=i\frac{\left[(-1)^n e-1\right]\left[2in\pi\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n=\frac{2\left[(-1)^n e-1\right]n\pi}{1+n^2\pi^2}$$

نبدل:

$$F(x)=(e-1)+\sum_{1=n}^{\infty}\frac{2\left[(-1)^2 e-1\right]}{1+n^2\pi^2}Cosn\pi x+\frac{2\left[(-1)^n e-1\right]}{1+n^2\pi^2}Sinn\pi x$$

$0<x<1$ أو $1<x<2$

التحليل التوافقي (*Harmonic analysis*):

كما نعلم فإن الكثير من الظواهر الفيزيائية تمثل وفق توابع دورية ومثل هذه التوابع كما رأينا يمكن تمثيلها بسلسلة فوريه ومن جهة أخرى يمكن التعبير عن التوابع الدورية بدلالة اهتزازات مختلفة التواتر حيث تختلف هذه التواترات بأمثال صحيحة لتواتر إحداها مثل هذا التمثيل الأخير يسمى تحليلاً توافقياً للدالة الدورية سنرى أن هناك توافق بين التحليل التوافقي وسلسلة فوريه ، و يسمى التمثيل الآتي للدالة $F(x)$ بالتمثيل التوافقي: $(2-9)$

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos(n\omega x - \phi_n)$$

حيث نسمي $A_1 \cos(wx - \phi_1)$ التوفيقة الأولى وسعتها A_1 بالتعريف وفرق طورها ϕ_1 وكذلك $A_2 Cos(2wx - \phi_2)$ التوفيقة الثانية وسعتها A_2 وفرق طورها ϕ_2 وهكذا...

سنرى الآن كيف يمكن الانتقال من التحليل التوافقي إلى سلسلة فوريه والعكس.

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[Cos n\omega x Cos\phi_n + Sin n\omega x Sin\phi_n\right]$$

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos\phi_n n\omega x + A_n Sin\phi_n Sin nwx$$

فإذا افترضنا أن: $A_0 = \frac{a_0}{2} \quad a_n = A_n Cos\phi_n \quad , \quad b_n = A_n Sin\phi_n$

عندها نجد: $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1=n}^{\infty} a_n Conwx + b_n Sin\ nwx$

وهو نشر فوريه الذي نعلمه.

وبالعكس يمكن الحصول من نشر فوريه على التحليل التوافقي باستخدام العلاقات: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_\pi^2} \quad \phi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad , \quad n = 1,2.$

ويشكل عام تسمي $A_n\ Cos\ (n\omega x - \phi_n)$ التوفيقة النونية سعتها A_n وفرق طورها ϕ_n وتواترها $\frac{n}{T}$ حيث T الدور و x متحول الزمن.

مثال 5: حلل توافقياً الدالة الدورية $F(x) = x^2$ ذي الدور 2π على الفترة $(0,2\pi)$ وارسمه على الفترة $(-\pi,3\pi)$.

الحل : يمكن نشر الدالة ذات الدور $2l = 2\pi$ وفق فوريه :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{\pi.3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 Cosnxdx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 Sinnxdx = -\frac{4\pi}{n}$$

ومنه: $x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{1=n}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} Cosnx - \frac{4\pi}{n} Sinnx$

وحسب علاقات التحويل إلى التحليل التوافقي نجد:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{4\pi^2}{3}$$

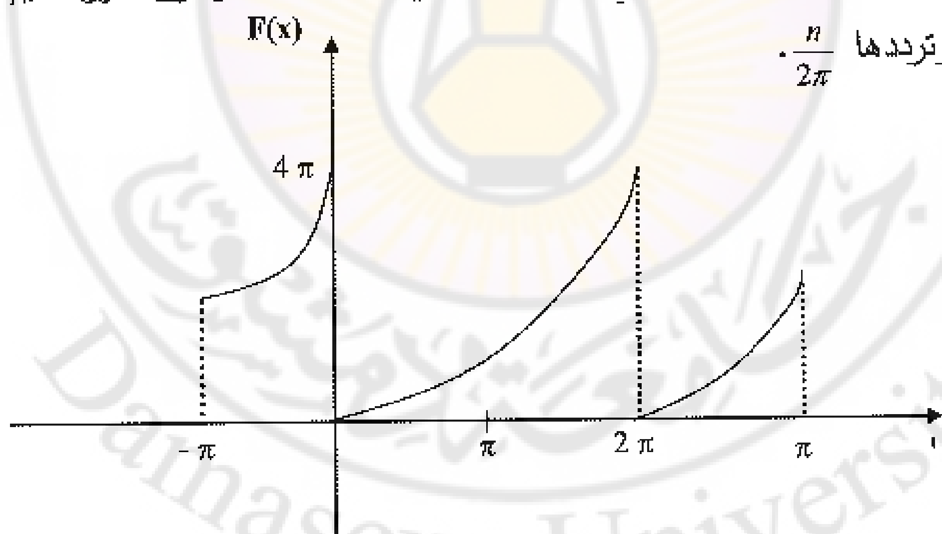
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{-4\pi}{n}\right)^2} = \frac{4}{n^2}\sqrt{1+\pi^2 n^2}$$

$$\phi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\frac{-4\pi}{n}}{\frac{4}{n^2}}\right) = tg^{-1}(-n\pi)$$

$$x^2 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos(nx - \phi_n)$$

فالاهتزاز الأساسي $A_1 Cos(x-\phi_1)$ سعته A_1 وفرق طوره ϕ_1 وتردده $\frac{1}{2\pi}$

أما التوفيقة النونية فهي $A_n Cos(nx-\phi_n)$ سعتها A_n وفرق طورها ϕ_n وترددها $\frac{n}{2\pi}$.



العمليات على سلاسل فوريه:

بفرض $G(x), F(x)$ دالتان لهما نشرا فوريه التالي على نفس الفترة.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi}{l}x + b_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$G(x) = \frac{a`_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a`_n Cos\frac{n\pi}{l}x + b`_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

عندها يمكن نشر الدالة $F(x) \pm G(x)$ وفق السلسلة.

$$F(x) \pm G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos\frac{2\pi}{l}x + B_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث تعطى الثوابت الجديدة B_n, A_n, A_0 كما يلي:

$$A_0 = a_0 \pm a`_0 \qquad A_n = a_n \pm a`_n \qquad B_n = b_n \pm b`_n$$

كذلك الأمر عندما نضرب الدالة $F(x)$ بثابت ما k عندها سلسلة الدالة الناتجة تضرب فيها الثوابت الأصلية بالثابت k ضمن شروط على الدالتين $G(x), F(x)$ يمكن ضرب هاتين الدالتين واستنتاج سلسلة الجداء.

الجمل المتعامدة (*Orthogonal Sete*):

تعريف4 : نقول عن دالتين $\psi_2(x), \psi_1(x)$ معرفتين على الفترة $[a, b]$ والمحققين للعلاقة: $\int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x)dx = 0$

إنهما متعامدتان على الفترة $[a, b]$، لتكن لدينا مجموعة الدوال:

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$$

معرفة على $[a, b]$ والتي تقبل هي ومربعاتها المكاملة على $[a, b]$.

(أي أنها كمولة تربيعياً) إذا حققت هذه الدوال:

$$\int_a^b \psi_n(x).\psi_m(x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \gamma_n^2 & n = m \end{cases}$$

نقول إنها متعامدة على $[a, b]$

ملاحظة 6: هناك دوال كمولة وليست كمولة تربيعياً مثل الدالة $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ على الفترة $(0,1)$. وفي الحالة الخاصة في حالة التعامدة عندما يكون $\gamma_n = 1$ نقول عن التعامد أنه نظامي.

ملاحظة 7: يمكن الحصول على التعامد النظامي من التعامد بشكل عام بقسمه كل دالة ψ_n على γ_n أي أنه إذا كانت جملة التوابع $\psi_1(x),..,\psi_n(x)$ متعامدة على الفترة (a,b) فإن الجملة $\dfrac{\psi_1(x)}{\gamma_1}, \ldots, \dfrac{\psi_n(x)}{\gamma_n}$ متعامدة نظامياً أيضاً.

مثال 6: إن الجملة $\{1, Cosnx, Sinnx\}$ متعامدة على الفترة $(-\pi,\pi)$ لأن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1.dx = 2\pi \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1.Cosnx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1.Sinnxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Cosnx Cosnxdx = \int_{-\pi}^{\pi} Sin\, nxSin\, nxdx = \pi$$

$$\int_{\pi}^{\pi} Sin\, nx Sin\, nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} Cos\, nx Cos\, nxdx = 0$$

عندما $n \neq m$

ملاحظة 8: الجملة المثلثية التالية : $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{Sinnx}{\sqrt{\pi}}, \frac{Cosnx}{\sqrt{\pi}} \right\}$

متعامدة نظامياً.

سلسلة فوريه والجمل المتعامدة:

تعريف 5:

نعرف سلسلة فوريه للدالة F(x) وفق الجملة المتعامدة $\psi_0(x),...,\psi_n(x)$

على الفترة $]a,b[$ كمايلي: $F(x) = C_0\psi_0(x) + C_1\psi_1(x) + .. + \psi_n(x)..$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n\psi_n(x).. \qquad .(2-10)$$

حيث يمكن تعيين الثوابت C_n وفق العلاقة:

$$C_n = \frac{\int_a^b F(x)\,\psi_n(x)dx}{\int_a^b \psi_n^2(x)dx}$$

لنضرب العلاقة (2–10) بـ$\psi_n(x)$ ولنكامل على الفترة $]a,b[$

$$\int_a^b F(x)\psi_n(x)dx = \sum_{1n=0}^{\infty}\int_a^b \psi_n(x).C_n.\psi_m(x)dx$$

في الطرف الثاني عندما $n \neq m$ بما أن الجملة متعامدة فإن التكاملات تكون معدومة وبالتالي: $\int_a^b F(x)\psi_n(x)dx = C_n\int_a^b \psi_n(x).\psi_n(x)dx$

ومنه يتحقق المطلوب $C_n = \dfrac{\int_a^b F(x)\psi_n(x)dx}{\int_a^b \psi_n^2(x)dx}$.

تكامل فوريه:

بفرض $F(x)$ دالة معرفة على $]-\infty,+\infty[$ ولها عدد محدد من نقاط الانقطاع من النوع الأول على كل فترة محدودة من $]-\infty,\infty[$

وتقبل المكاملة بإطلاق على طول المجال $]-\infty,\infty[$ عندها يمكن نشر $F(x)$ وفق فوريه في كل نقطة x_0 يقبل فيها $F(x)$ الاشتقاق أي:

$$F(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi}{l}x_0 + b_n Sin\frac{n\pi}{l}x_0$$

يمكننا أن نبدل عن b_n، a_n، a_0 وفق علاقات أولر فنجد:

$$F(x_0) = \frac{1}{2l}\int_l^l F(x)dx + \sum_{l=n}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{1}{l}(F(x)Cos\frac{n\pi}{l}xdx\,[Cos\frac{n\pi}{l}x_0$$

$$+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}[F(x)Sin\frac{n\pi}{l}xdx]Sin\frac{n\pi}{l}x_0$$

$$F(x_0)=\frac{1}{2l}\int_{e}^{e}F(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{l}^{l}F(x)Cos\frac{n\pi}{l}(x-x_0)dx$$

بفرض $\frac{n\pi}{l}=U_n$ نجد $\Delta U_n=U_{n+1}-U_n=\frac{\pi}{l}$

أي: $\frac{1}{l}=\frac{\Delta U_n}{\pi}$ ومنه:

$$F(x_0)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F(x)dx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta U^{\wedge}F(x)CosU_n(x-x_0)dx$$

عندما $l\to\infty$ نجد أن: $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F(x)dx\to 0$

لأن (قياسه) محدود و $l\to\infty$

كذلك: $\sum_{1}^{\infty}\Delta U_n\int_{-l}^{l}F(x)Cos(x-x_0)U_n dx\to$

$$\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}F(x)Cos(x-x_0)\,udx$$

لأن: $\sum_{1}^{\infty}\to\int_{0}^{\infty}$ $\Delta U_n\to du$

أي بشكل خر:

$$F(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}du\int_{-l}^{l}F(x)Cos(x-x_0)udx \qquad (2\text{-}11)$$

ملاحظة 9: إن النهايات السابقة تعتمد على إثبات مبرهنة ريمن في الفترات غير المنتهية وعلى أن $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Sinx}{n}dx = \pi$

مبرهنة: بفرض $F(x)$ دالة لها عدد محدود من نقاط الانقطاع من النوع الأول على كل فترة محدودة من الفترة $(-\infty ، \infty)$ عندها في كل نقطة x يقبل فيها $F(x)$ المفاضلة يكون:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}F(t)Cosu(t-x)dtdu\,..\ (2\text{-}12)$$

نسمي التكامل الأخير بتكامل فورييه للدالة $F(x)$ ، حيث استبدلنا في (2 . 11) كل $x_0 \leftarrow x$ و $t \leftarrow x$ يمكن إعادة صياغة تكامل فورييه السابق إذا فككنا $Cos\ u(t\text{-}x)$ فنجد :

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}(a(u)\cos ux+b\,(u)Sinux]\,du$$

حيث:
$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)Cosutdt$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)Sin\,ut\,dt$$

وهذه العلاقات صحيحة (كما في نشر فورييه) ضمن شروط كافية ليست لازمة.

الشكل العقدي لتكامل فوريه: *Complex form fourier integral*

في تكامل فوريه كان لدينا العبارة $I = a(u)\ Cos\ ux + b\ (u)\ Sin\ ux$

نبدل حسب أولر: $a(u)\left(\frac{e^{iux}+e^{-iux}}{2}\right)+b(u)\left(\frac{e^{iux}-e^{-iux}}{2i}\right)$

$$I = C(u).e^{iux} + C(-u).e^{-iux}$$

حيث:

$$C(u) = \frac{a(u)-ib(u)}{2}$$

$$C(-u) = \frac{a(u)+ib(u)}{2}$$

يمكننا حساب $C(u)$ فتجد: $(2\text{-}13)$ $C(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} F(t).e^{iut}.dt$

نبدل في عبارة تكامل فوريه: $F(x) = \int_0^{\infty}[a(u)Cos\,ux + b(u)\ Sin\,ux]\ du$

فنجد:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(u).e^{iux}.du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} F(t).e^{iu(x-t)}.dt$$

وبفرض أن:

$$F(u) = \int_{\infty}^{\infty} F(t).e^{iut}.dt$$

نجد:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u).e^{iux}du. \qquad .(2-14)$$

وهو الشكل العقدي لتكامل فوريه.

تكامل فوريه للتوابع الفردية والتوابع الزوجية:

بسهولة نرى أنه في حالة التوابع الفردية فإن $a(u)=0$ أما

$$b(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(t)\,Sin\,ut\,dt$$

وفي حالة التوابع الزوجية فإن $b(u)=0$ وأما $a(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(t)Cos\,ut\,dt$

مثال (7):

أوجد تكامل فوريه للدالة $F(x)$ المعرف كمايلي:

$$F(x)=\begin{cases}1\leftarrow |x|<1\\ \frac{1}{2}\leftarrow |x|=1\\ 0\leftarrow |x|>1\end{cases}$$

نلاحظ من البيان أن الدالة $F(x)$ زوجية، و لهذا $b(u)=0$

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}a(u)\,Cosuxdu$$

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(t)Cos\,ut\,dt$$

$$a(u)\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}Cosutdt=\frac{2}{\pi}\frac{Simut}{u}\Big|_{0}^{1}$$

$$a(u)=2\frac{Sinu}{u}$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Sinu}{u}Cos\,ux\,du=\begin{cases}1\leftarrow|x|<1\\ \frac{1}{2}\leftarrow|x|=1\\ 0\leftarrow|x|>1\end{cases}$$

نلاحظ من أجل $x=0$ أي $Cos\,u\,(0)=1$ أي: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Sinu}{u}du=1$

$$\int_0^{\infty}\frac{Sinu}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

تحويل فوريه وعلاقته بتحويل لابلاس:

بالتعريف نسمي $\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{-iut}dt$ بتحويل فوريه للدالة $F(t)$ ونرمز لها بـ$f(u)$ أي: $f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{-iut}.dt$

وأما $F(t)$ فيدعى بتحويل فوريه المعاكس لـ$F(u)$.

لندرس الدالة: $F(t)=\begin{cases}e^{-\lambda t}\phi(t)\leftarrow t>0\\ 0\qquad\leftarrow t<0\end{cases}$

حيث $\phi(t)$ دالة للمتحول t، عندها نجد أن تحويل فوريه للدالة $F(t)$ يكتب: $F(u)=\int_0^{\infty}e^{-xt}\phi(t).e^{-iyt}dt$ حيث استبدلنا في تحويل فوريه u بـy و λ بـx $F(u)=\int_0^{\infty}e^{-(x+iy)t}\phi(t).dt$

وبفرض $S=x+iy$ متحول عقدي قسمه الحقيقي x موجب نجد:

$$F(u)=\int_0^{\infty} e^{-st}\phi(t)dt = La\,[\phi(t)\,u(t)]$$

أي أن تحويل فوريه للدالة $F(t)$ هو نفسه تحويل لابلاس لدالة $\phi(t)$

(ملاحظة إن تحويل لابلاس لدالة ما $\phi(t)$ معرفة من أجل $t>0$

بالتعريف هو $\phi(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\phi(t)dt$

مثال (8): اعتماداً على تكامل فوريه برهن على صحة مايلي:

$$\int_0^{\infty}\frac{Cos\lambda x}{\lambda^2+1}d\lambda=\frac{\pi}{2}.e^{-x} \qquad x\geq 0$$

لندرس الدالة $F(x)=e^{-x}$ فنجد: في عبارة تكامل فوريه نستبدل: e^{-x}

بـ $F(x)$ فنجد: $e^{-x}=F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}Cos\lambda x d\lambda\int_0^{\infty}e^{-u}Cos\lambda u du$

لنحسب التكامل: $I=\int_0^{\infty}e^{-u}Cos u\lambda du$

نحسب التكامل I بالتجزئة: $I=e^{-u}\,\frac{Sin u\lambda}{\lambda}\,\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}e^{-u}Sin u\lambda du$

$$I_1=\int_0^{\infty}e^{-u}Sin u\lambda du$$

نحسب التكامل I_1 بالتجزئة $-e^{-u}\,du = du_2 \quad e^{-u} = u_2$

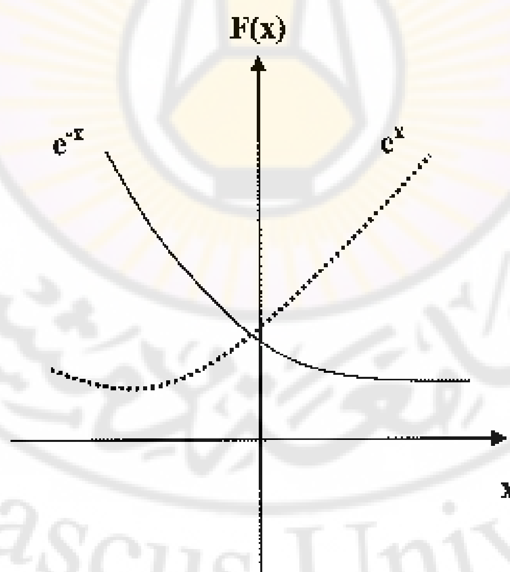
$$Sinu\lambda\,du = dv \qquad v = -\frac{1}{\lambda}Cosu\lambda$$

$$I_1 = -\frac{e^{-u}}{\lambda}Cosu\lambda\,\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-u}Cosu\lambda\,du = +\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}I$$

نبدل في علاقة I فنجد: $I = e^{-u}\dfrac{Sinu\lambda}{\lambda}\,\Big|_0^{\infty} + \dfrac{1}{\lambda}\left[\dfrac{1}{\lambda}(1-I)\right]$

$I = \dfrac{1}{1+\lambda^2}$ نبدل في علاقة e^{-x} فنجد :

$$\int_0^{\infty}\frac{Cos\lambda x d\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-x} \qquad x \ge 0$$



الفصل السابع

الدوال الخاصة : Special Functions

إن الدوال الخاصة هي مجموعة من الدوال غير العادية التي تصادف في الكثير من التطبيقات الهندسية الكهربائية منها والميكانيكية على شكل تكاملات محددة لا يمكن حلها تقليدياً.

سوف نطلع على بعض منها بالتفصيل والبعض الآخر بالإيجاز.

تكامل أولر من النوع الأول (الدالة بيتا):

أطلق ليجاندر اسم تكامل أولر من النوع الأول على التكامل الوسيطي التالي:

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad (1)$$

حيث إن هذا التكامل له معنى من أجل $a>0\ ,\ b>0$ ، وهذا التكامل هو تكامل وسيطي (ذو وسيطين) ومتحول واحد وهو تدعى بالدالة بيتا.

ملاحظة 1: من أجل $a=b=0$ نجد التكامل الشاذ التالي:

$$\beta(a,b)=\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)}$$

خواص الدالة $\beta(a,b)$:

1 . باستبدال $1-t$ بالمتحول x نجد: (2) $\beta(a, b) = \beta(b, a)$

2- باستخدام المطابقة نجد: $\beta(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\beta(a,b-1)$

وذلك لأن $x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$

$$\beta(a,b) = \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$\beta(a,b) = \frac{b-1}{a}\beta(a,b-1) - \frac{b-1}{a}\beta(a,b)$$

ملاحظة 2: يمكن استخدام العلاقة السابقة بشكل متتالٍ على شرط أن يبقى $b > 1$ كذلك يمكن استنتاج العلاقة التالية بسبب التناظر في β بالنسبة لـ b, a و حيث $a > 1$ ومنه $\beta(b,a) = \frac{a-1}{a+b-1}\beta(a-1,b)$

3- وإذا وضعنا $b = n$ عدد طبيعي نجد بتطبيق العلاقة (2) مرات متتالية: $\beta(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\,\frac{n-2}{a+n-2}\,\frac{n-3}{a+n-3}\cdots\frac{1}{a+1}\beta(a,1)$

وإذا حسبنا $\beta(a,1)$ نجد: $\beta(a,1) = \int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$

$$\beta(a,n) = \frac{1,2,3,\ldots(n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)} \qquad (4)$$

وعندما $a = m$ نجد: $\beta(m,n) = \frac{(n-1)!}{(m+n-1)..(n+1)m}$

$$= \frac{(n-1)!}{\frac{(m+n-1)..(m+1)m.(m-1)!}{(m-1)!}}$$

$$\beta(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \qquad (5)$$

حيث $0! = 1$ ودوماً n, m أعداد صحيحة موجبة.

4. شكل آخر للدالة بيتا: (6) $\beta(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy$

لنجري التغير التالي في عبارة $\beta(a,b)$: $x = \frac{y}{1+y}$, $\infty \geq y \geq 0$,

فنجد: $dx = \frac{y}{(1+y)^2}$ من أجل $x = 0 \to y = 0$ و $x = 1 \to y = \infty$

$$\beta(a,b) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{b-1} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

وهو الشكل الثاني للدالة $\beta(a,b)$.

5. لنبدل في العبارة (6) $b = 1-a$ فنجد: $\beta(a,1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy$

ومن خواص بعض التكاملات في الساحة العقدية $\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{Sina\pi}$

حيث $0 < a < 1$ أي: $\beta(a,1-a) = \frac{\pi}{Sina\pi}$

وعندما $a = \frac{1}{2} = 1-a$ نجد: $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$

تكامل أولر من النوع الثاني:

أعطى ليجاندر التكامل التالي: $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}.e^{-x}dx \qquad (7)$

تسمية تكامل أولر من النوع الثاني أو بالدالة غاما ، وهو تكامل وسيطي هام جداً في دراسة التحليل وتطبيقاته لندرس بعض خواصه.

I . لنبدل في العلاقة (7) $x=\ln\frac{1}{z}$ فنجد: $x=0\to z=1; x=\infty\to z=0$

ومنه $\frac{1}{z}=e^x\to z=e^{-x}$ أي أن : $\Gamma(a)=-\int_1^0\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}z\frac{dz}{z}$

$$\Gamma(a)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}dz$$

يمكن البرهان على صحة العلاقة التالية: $\ln\frac{1}{z}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$

لأجل ذلك نمهد بالبرهان التالي: $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\lg_a(H\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\lg_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$=\lg_a\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lg_a e. \qquad (A)$$

وعندما $a=e$ نجد: $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$

لنبرهن أيضاً على $\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}\ln a$

لهذا نفرض $a^\alpha-1=\beta$ فيكون : $a^\alpha=1+\beta\Rightarrow(\alpha\to 0\Leftrightarrow\beta=0)$

ومنه $\alpha = \lg_a(1+\beta)$

لهذا نجد: $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = \lim\limits_{\beta\to 0} \frac{\beta}{\lg_a(1+\beta)} = \frac{1}{\lg_a e} = \ln a$

وحسب العلاقة (A) إذا أخذنا كحالة خاصة: $\alpha = \frac{1}{n} \Leftarrow \begin{matrix} \alpha \to 0 \\ n\to\infty \end{matrix}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \ln a$$

وبوضع $a = \frac{1}{z}$ نجد : $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\} = \ln\frac{1}{z}$

$$\ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-z^{\frac{1}{n}})}{z^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)}{z^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$$

نبدل في عبارة $\Gamma(a)$ فنجد : $\Gamma(a) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{a-1}\int_0^1 \left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz$

$$z = y^n \Rightarrow dzz = ny^{n-1}dy$$

نبدل: $\Gamma(a) = \lim\limits_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy$

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a\ \beta(n,a) \qquad (8)$$

المؤلفون : د.محمد نور شمه   د. عازار الشايب   د. شكري أبو عرابي

وهو شكل آخر للدالة $\Gamma(a)$ ، ويمكن أيضاً وضع $\Gamma(a)$ باستبدال $\beta(n,a)$ فنجد:

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^{a}\frac{(n-1)(n-2)..3.2.1}{a(a+1)..(a+n-1)} \qquad (9)$$

2 . إن الدالة $\Gamma(a)$ (من أجل $a>0$) مستمرة ولها مشتقة من أية رتبة بالنسبة للعدد a.

يكفي البرهان على وجود المشتق ليتم المطلوب لهذا نشتق ما تحت إشارة التكامل بالنسبة للوسيط a.

$$\frac{d\Gamma(a)}{da}=\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln(x)).e^{-x}dx$$

$$=\int_0^1 x^{a-1}(\ln x)dx+\int_1^\infty x^{a-1}(\ln x).e^{-x}dx$$

إن كلاً من التكاملين موجود ولهذا فإن المشتقة $\Gamma'(a)$ موجودة بسبب تكامل القيم المطلقة للدوال المستكملة (حسب قاعدة لايبتز) وبالاشتقاق مرة ثانية.

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln(x))^2.e^{-x}.dx$$

كذلك

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln(x))^n.e^{-x}.dx$$

3 . إذا كاملنا عبارة الدالة $\Gamma^{(n)}(a)$ بالتجزئة نجد: $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$

4 . في العلاقة $\Gamma(a)$ نضع $a=1$ نجد : $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0.e^{-x}dx=1$

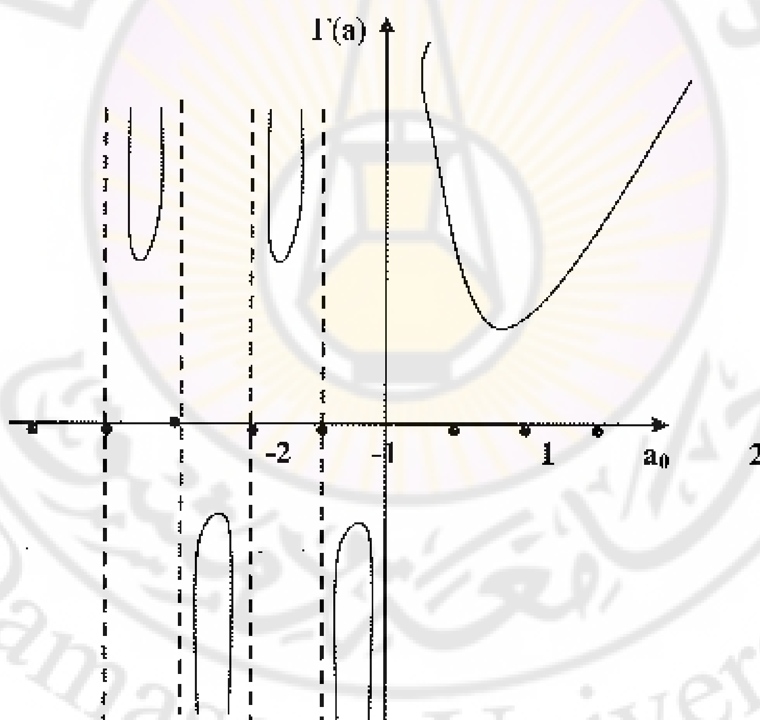
وعندما يكون n طبيعياً نجد: $\Gamma(n+1)=n!$

5 . نلاحظ أيضاً على الفترة $(0,\infty)$ نجد: $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$

كذلك نجد أن $\Gamma'(a)$ متزايد لأن $\Gamma''(a)$ موجب ونجد أيضاً $0 < a < a_0$ ، $\Gamma'(a) < 0$ والدالة $\Gamma(a)$ متناقصة على المجال السابق وهي $\Gamma(a)$ متزايدة على المجال $a_0 < a < \infty$ لأن $\Gamma'(a) > 0$ ، ويمكن التأكد من أن $a_0 = 1.4616$ وأن $\min \Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0.8856$

بسهولة نرى أن:
$$\lim_{a \to 0+} \Gamma(a) = \lim_{a \to 0+} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \infty$$

وسنرى لاحقاً أن قيم الدالة Γ عند القيم الصحيحة السالبة تسعى إلى $\pm\infty$ ولهذا يمكن رسم منحني هذه الدالة كما يلي:



العلاقة بين الدالتين $\Gamma(a)$ و $\beta(a,b)$

في عبارة $\Gamma(a)$ نجري التحويل $x = ty$ فنجد: $\begin{bmatrix} y=0 \\ y=\infty \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=\infty \end{bmatrix}$

$$dx = t.dy$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty (ty)^{a-1}.e^{-ty}tdy = t^a\int_0^\infty y^{a-1}.e^{-ty}.dy$$

نضرب الطرفين بالمقدار t^{a-1} و نكامل من 0 إلى ∞ بالنسبة و t .

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = \int_0^\infty t^{a-1}dt = \int_0^\infty y^{a+b-1}.e^{-(1+t)y}dy$$

لكن الطرف الأول من العلاقة السابقة هي الدالة $\beta(a,b)$ مضروبة بالمقدار $\Gamma(a+b)$ لهذا نجد:

$$\Gamma(a+b)\ \beta(a,b) = \int_0^\infty y^{a+b-1}.e^{-y}dy\int_0^\infty t^{a-1}.e^{-ty}dt$$

لكن $\displaystyle\int_0^\infty t^{a-1}.e^{-ty}dt = \frac{\Gamma(a)}{y^a}$

ومنه نجد : $\displaystyle\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (10)$

أوجد هذه العلاقة العالم ديرخليه.

7. في العلاقة (10) لنضع $b = 1 - a$ فنجد:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\beta(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

$$\beta(a,1-a)=\frac{\pi}{Sin\,a\pi}\qquad 0<a<1$$

ومن أجل $a=\frac{1}{2}$

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

كذلك:

$$\beta(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{1}$$

أي

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{Sin\,a\pi}\qquad (11)$$

وتسمى هذه العلاقة علاقة الإضافة (أو الإتمام) ومن أجل $a=\frac{1}{2}$ نجد:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\,dz$$

نبدل $z\to x^2$ فنجد:

$$\sqrt{\pi}=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وهو تكامل بواصون.

8 . إن قيم $\Gamma(a)$ من أجل القيم الصحيحة السالبة يمكن حسابها من العلاقة:

$$\Gamma(1+a)=a\Gamma(a)$$

عندما $a=\varepsilon \to 0^+$ نجد : $\Gamma(0^+)=\dfrac{\Gamma(0^+ +1)}{0^+}=+\infty$

وعندما $\varepsilon \to 0^-$ نجد: $\Gamma(0^-)=\dfrac{\Gamma(0^- +1)}{0^-}=-\infty$

أي $\Gamma(0)=\pm\infty$ من أجل $a=-1+\varepsilon$

$$\Gamma(-1)^+=\frac{\Gamma(0^+)}{-1}=-\infty$$

ومن أجل $a=-1-\varepsilon$ يكون : $\Gamma(-\varepsilon)=(-1-\varepsilon)\,\Gamma(-1-\varepsilon)$

ننهي a إلى $1-$ من اليسار $\Gamma(-1)=\dfrac{\Gamma(0)}{-1}=\dfrac{-\infty}{-1}=+\infty$

وهكذا نجد من أجل $a=-m$ عدد صحيح سالب $\Gamma(-m)=\pm\infty$

ومن أجل $a=n-\dfrac{1}{2}$ نجد: $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$

نطبق ذلك عدة مرات: $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\left(n-\dfrac{3}{2}\right)\cdots\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots1}{2.2.2\ldots2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad (12)$$

حيث $(2n-1)!!$ هو العاملي المضاعف (القفزة 2 بدل 1)

نبدل $a=n+\dfrac{1}{2}$ في العلاقة $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\dfrac{\pi}{Sin a\pi}$ فنجد:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{Sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}=(-1)^n\pi$$

نعوض من (12) عن $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ فنجد: (13) $\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$

مثال (1): احسب التكامل: $I=\int_0^\infty x^3.e^{-x}dx$

الحل : نوازن هذا التكامل مع الدالة $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}.e^{-x}.dx$

فنجد $a=4$ ومنه $I=\Gamma(4)=3!=6$

مثال (2):

احسب قيمة التكامل $J=\int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx$

الحل : بالمقارنة مع التكامل $\Gamma(a)$ نجد هناك اختلاف بالموازنة المباشرة لهذا يمكن إجراء تحويل ما للنقل للشكل المباشر ولهذا نفرض $2x=z$ نلاحظ أن حدود التكامل لا تتغير لكن $dz=2\,dx$ نجد:

$$J=2\int_0^\infty\left(\frac{z}{2}\right)^6.e^{-z}dz=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty z^6.e^{-z}dz$$

$$=\frac{1}{2^7}\Gamma(7)=\frac{6!}{2^7}$$

مثال (3): **احسب التكامل:** $k=\int_0^{\infty}\sqrt{y}.e^{-y^2}dy$

الحل : نلاحظ هنا يوجد تغير أكبر في شكل الدالة المستكملة حيث يظهر الأس بشكل تربيعي لهذا نجري التحويل التالي:

نفرض $z = y^2$ نجد أن حدود التكامل لا تتغير لكن $y=z^{\frac{1}{2}}$ ومنه

نبدل: $dy=\frac{1}{2}.z^{-\frac{1}{2}}dz$ $\qquad K=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}z^{\frac{1}{4}}.e^{-z}.z^{-\frac{1}{2}}dz$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}z^{-\frac{1}{4}}.e^{-z}.dz$$

نوازن مع الدالة $\Gamma(a)$ عندها $-\frac{1}{4}=a-1\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$$K=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).Sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

دالة الخطأ *(Error Function)*:

تعرف دالة الخطأ (وهو يستخدم كثيراً في نظرية الاحتمال) بالعلاقة:

$$er(f(x))=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-y^2}dy \qquad (14)$$

تتصف هذه الدالة بالصفات التالية:

1-دالة فردية $er(f(-x)) = -er(f(x))$

-2 $er(f(\infty)) = 1$

ومنه وفق خاصة الفردية $er(f(-\infty)) = -1$

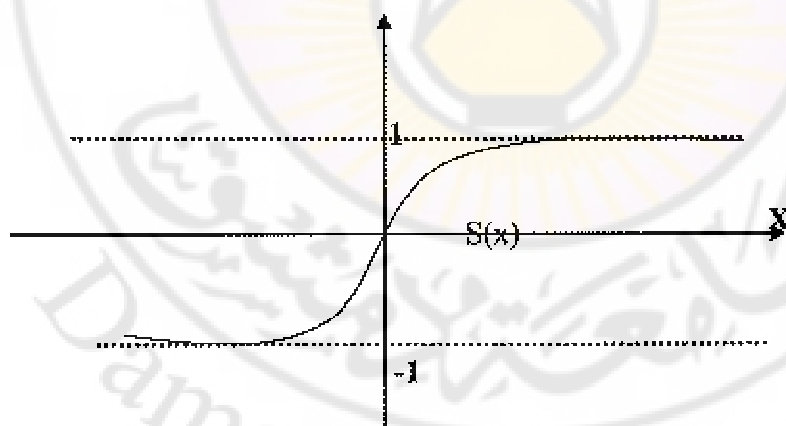
وتعرف الدالة المتممة لدالة الخطأ كما يلي: $er(fc(x)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2} dy$

ومجموع الدالتين $er(fc(x)) + er(f(x)) = 1$ وتعطى قيمة بواسطة جداول.

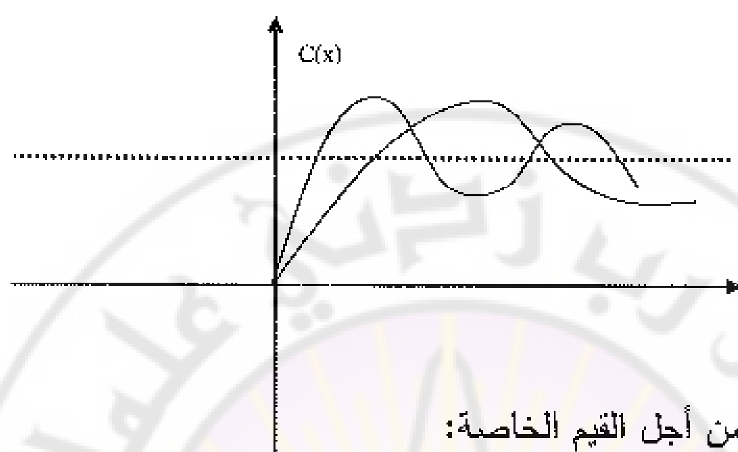
تكامل فرينيل *(Fresnel Function)*:

تظهر هذه التكاملات في أبحاث الضوء عادة وتعرف كمايلي:

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x Sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) dy \\ C(x) &= \int_0^x Cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) dy \end{aligned}\right\} \quad (15)$$



نلاحظ أن: $S(-x)= - S(x)$ و أن : $C(-x) = - C(x)$



نلاحظ من أجل القيم الخاصة:

$$S(0) = C(0) = 0$$

$$C(\infty) = S(\infty) = ½$$

$$C(-\infty) = S(-\infty) = - ½$$

ويمكن تعرف الدوال المتممة لـ$S(x)$, $C(x)$ كما يلي:

$$S(x) + S(x) = ½ \qquad C(x) + C(x) = ½$$

الجيب التكاملي *(Sine integral)*:

نعرف هذه الدالة بالعلاقة:
$$Si(x) = \int_0^x \frac{Siny}{y} dy \qquad (16)$$

$$= \int_0^x (\frac{1 - y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + ..) dy$$

$$Si(x) = C + x - \frac{x^3}{3!.3} + \frac{x^5}{5!.5} - \frac{x^7}{7!.7} + ...$$

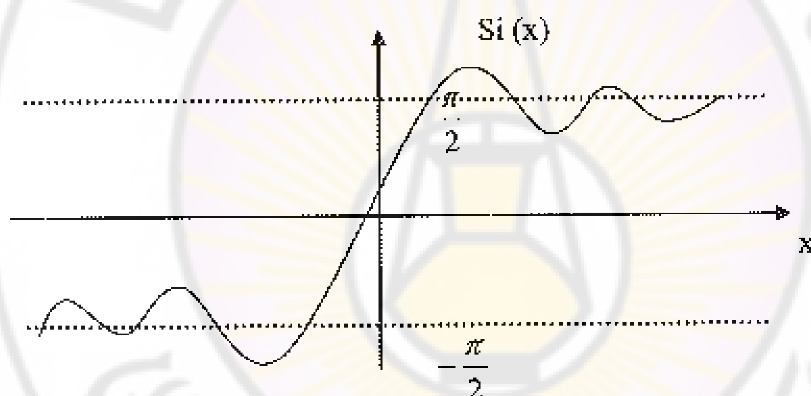
نلاحظ أنه يمكن تعيين قيمة الثابت عندما $x = 0$ نجد $c = 0$ ويكون:

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3-3!} + \frac{x^5}{5.5!} + \dots$$

$$Si(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1).(2n-1)!}$$

وعندما $x \to \infty$ نجد: $$Si(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{Siny}{y} dy = \frac{\pi}{2}$$

وذلك وفق تكامل فوريه نلاحظ: $Si(-x) = -Si(x)$ و $Si(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$



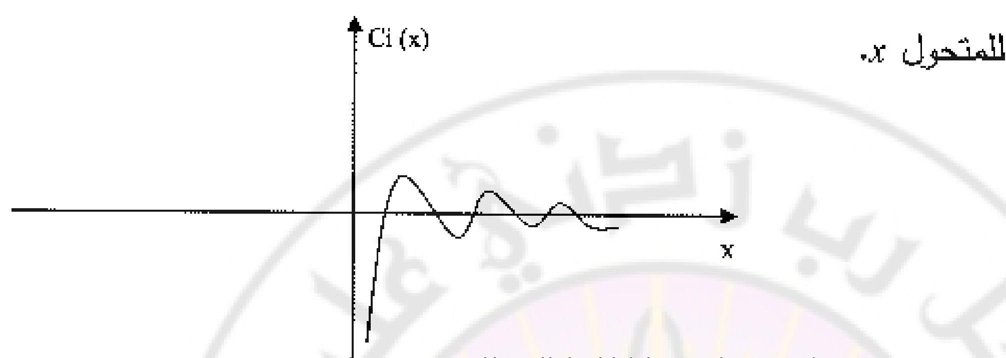
التجيب التكاملي *(Cosine integral)*:

نعرف دالة التجيب التكاملي بالعلاقة:

$$Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{Cosy}{y} dy \qquad (18)$$

نلاحظ أن هذه الدالة زوجية وأن : $Ci(\infty) = 0$, $Ci(0) = -\infty$

هناك جداول تعطي قيم هذه الدوال الخاصة من أجل أية قيمة للمتحول x.



اللغارتم التكاملي (Logarithm integral):

يعرف اللغارتم التكاملي بالعلاقة: $Li(x)=\int \frac{dx}{Ln(x)}$

لنبدل $x=e^t$ فنجد: $dx=e^t\,.\,dt$

$$Li(x)=Li(e^t)=\int \frac{e^t.dt}{Ln(e^t)}$$

$$=\int \frac{\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+..\right)dt}{t}$$

$$=\int \frac{dt}{t}+\int dt+\int \frac{t}{2!}dt+...=\ln t+t+\frac{t^2}{2.2!}+\frac{t^3}{3.3!}+...$$

$$Li(x)=lnlnt+lnx+\frac{(lnx)^2}{2!.2}+\frac{(lnx)^3}{3!.3}+...+c$$

$t>0\ ,\ x=e^t$ لأن $x>1$

دوال بيسيل *(Bessel Functuions)*:

تعطى معادلة بيسيل وفق العلاقة : $x^2 y''_x + xy'_x + (x^2 - m^2)y = 0 \quad (19)$

حيث m عدد ثابت (عقدي أو حقيقي).

مثل هذه المعادلات التفاضلية ذات الأمثال المتغيرة يبحث عن حل لها على شكل دالة مؤلف من قوى بالنسبة لـ x مضروبة بسلسلة قوى بالنسبة لـ x مثل:

$$y = x^l \sum_{k=0}^{\infty} A_k . X^k$$

يمكن افتراض $A_0 \neq 0$ وهذا ممكن لعدم تعين l كما يمكن إعادة كتابة الحل السابق كما يلي:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k X^{l+k}$$

بالاشتقاق نجد:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (l+k) A_k x^{l+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (l+k)(l+k-1) A_k X^{l+k-2}$$

نعوض في معادلة بيسيل (19) فنجد:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (l+k)(l+k-1) A_k X^{l+k-2} +$$

$$x \sum_{k=0}^{\infty} (l+k) A_k x^{(l+k-1)} + (x^2 - m^2) \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{l+k} = 0$$

نطابق أمثال المتحول x المرفوع إلى الأسس التالية : $l, l+1, .., l+k$

مع الصفر فنحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\left.\begin{array}{l}\left[l(l-1)+l-m^2\right]A_0=0\Rightarrow(l^2-m^2)A_0=0\\ \left[(l+1)l+(l+1)-m^2\right]A_1=0\Rightarrow\left[(l+1)^2-m^2\right]A_1=0\\ \left[(l+2)(l+1)+(l+2)-m^2\right]A_2+A_0=0\Rightarrow\\ \left[(l+2)^2-m^2\right]A_2+A_0=0\\ \left[(l+k)(l+k-1)+(l+k)-m^2\right]A_k+A_0=0\Rightarrow\\ \left[(l+k)^2-m^2\right]A_k+A_{k-2}=0\end{array}\right\} \quad (20)$$

لندرس المساواة : $\left[(l+k)^2-m^2\right]A_k+A_{k-2}=0$

يمكن إعادة كتابة ما سبق على الشكل التالي:

$$(l+k+m)\ (l+k-m)\ A_k+A_{k-2}=0$$

ما أن $A_0\neq 0$ (عند استبدال $k=0$ و $A\text{-}2=0$) نجد:

$$l^2-m^2=0\ \Rightarrow l_1=m \text{ أو } l_2=-m$$

درسنا الحل $l_1=m>0$ نجد من جملة المعادلات (20) يمكننا المعاملات $A_1,A_2,..A_k$ بينما يبقى A_0 اختيارياً لنفرض أن $A_0=1$ دها العلاقة التراجعية التالية:

$$A_k=\frac{-A_{k-2}}{K(k+2m)}.....$$

نحول k فنجد:

$$\begin{cases} A_1 = A_3 = \ldots\ldots = A_{2n+1} = 0 \\ A_2 = \dfrac{1}{2(2m+2)} \qquad (21) \\ A_4 = \dfrac{1}{(2)(4)(2m+2)(2m+4)} \end{cases}$$

وبشكل عام :

$$A_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{(2)(4)(6)..(2m)(2m+2)(2m+2)(2m+4)(2m+2n)}$$

نعوض في العلاقة: $y = x^l \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$

ونجد من أجل الحل الأول y_1 $(l = m)$

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{(2)(4)(2m+2)(2m+4)}$$
$$- \frac{x^6}{(2)(4)(6)(2m+2)(2m+4)(2m+0)} + \ldots (22)$$

إن جميع معاملات A_{2n} تتحدد وفق العلاقة (21) لأنه مهما تكن k فإن معامل A_k في المعاملات (20) وهي: $(l+k)^2 - m^2 \neq 0$

ولهذا يكون y_1 حل خاص للمعادلة (19) وبمناقشة مماثلة يظهر أن حالة الجذر $l_2 = -m$ يمكن تحديد كل المعاملات A_k وذلك عندما تتحقق المتباينة: $(l+k)^2 - m^2 \neq 0$

من أجل أي $k > 0$ وزوجي أي: $l_2 + k \neq m$

ولكن $m = l_1$ وبالتالي: $l_2 + k \neq l_1$

أي $l_2 - l_1 \neq k$ حيث $k > 0$ وزوجي وبما أن:

$l_1 = m$, $l_2 = -m$ يكون $l_1 - l_2 = 2m$

فإذا كان m غير صحيح يمكننا كتابة الحل الخاص الثاني للمعادلة (19) :

$$y_2 = x^{-m}\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{x^2}{2(-2m+2)} + \dfrac{x^4}{(2)(4k-2m+2)(-2m+4)} - \\ - \dfrac{x^6}{(2)(4)(6)(-2m+2)(2m+4)(2m+6)} + \dots \end{array}\right] \qquad (23)$$

نستبدل في هذه العلاقة m بالمقدار $-m$ فنحصل على سلسلة جديدة وهاتان السلسلتان متقاربتان مهما تكن x (حسب دلامبير).

يمكن أيضاً البرهان على أن y_2, y_1 حلان مستقلان خطياً (بدراسة النسبة y_2, y_1) بعد ضرب الحل y_1 بثابت نسميه معين بيسيل من النوع الأول والرتبة m ونرمز له بالمقدار J_m .

وكذلك الحل الثاني y_2 ونرمز له بالمقدار J_{-m} ، ويكون حل المعادلة (19) هو: $Y = A\,J_m + B\,J_{-m}$

حالة خاصة : عند اختيار $m = \frac{1}{2}$ نجد من العلاقات (22):

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{(2)(3)}+\frac{x^4}{(2)(4)(3)(5)}-\frac{x^6}{(2)(4)(6)(3)(5)(7)}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots\right]$$

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}Sinx$$

وعند اختيار الثابت $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ نجد: $y_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}Sinx$

بنفس الطريقة: $y_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}Cosx$

ويكون الحل العام لـ(19) هو: $y=Ay_{\frac{1}{2}}(x)+By_{-\frac{1}{2}}(x)$

وعندما يكون $n=m\geq 0$ صحيحاً فإن المعاملات (23) يكون لها معنى بعد y_r حلاً خاصاً أن العلاقة الناتجة عن (23) باستبدال m بالمقدار n فليس لها معنى لانعدام أحد مقاماتها، وتكون دالة بيسيل من أجل $m=n>0$ كما يلي:

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n n!}\left[\begin{array}{l}1-\frac{x^2}{(2)(2n+2)}+\frac{x^4}{(2)(4)(2n+2)(2n+4)}\\-\frac{x^6}{(2)(4)(6)(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+\ldots\end{array}\right]$$

أي: $J_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(\lambda+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}$

ولإيجاد الحل الخاص الثاني نبحث عنه بالصورة التالية:

$$J`_n(x) = J_n(x)\ln(x) + x^n \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k$$

نعوض في المعادلة (19) ونعين الثوابت B_R والدالة $J`_n(x)$ بعد ضربه بثابت معين ويسمى عندها $J_n(x)$ بدالة بيسيل من النوع الثاني من الرتبة n ويمثل عندها الحل العام للمعادلة :

$$Y = A_1 J_n(x) + B_1 J`_n(x)$$

ويمكن الإشارة إلى أن: $\lim_{x \to 0} J_n`(x) = \infty$ ، ولهذا نضع عند دراسة الحل السابق $B_1 = 0$.

تطبيق:

لتكن لدينا معادلة بيسيل التالية: $y`` + \frac{1}{x} y` + y = 0$

وبفرض $m = 0$ ، عين الحل المحقق للشروط الابتدائية.

$$X = 0 \Rightarrow y(2) = 2$$

$$X = 0 \Rightarrow y`(0) = 0$$

من علاقة $J_n(x)$ نضع $(n = 0)$ نجد: $J_0(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{(\lambda!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots$$

وحسب الشروط الابتدائية: $Y = 2\, J_0\,(x)$

ملاحظة:

عندما يطلب الحل العام للمعادلة المعطاة نبحث أولاً عن حل خاص من الشكل:

$$J_0`(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{6}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)...$$

وبعد ضربها بثابت نحصل على دالة بيسيل من النوع الثاني ذات الرتبة الصفرية.

هناك أشكال أخرى مختلفة لدوال بيسيل لا يتسع المجال لعرضها.

كثيرات حدود ليجاندر (حدوديات ليجاندر) *Legendre polynomials*:

إن لحدوديات ليجاندر شهرة واسعة لما لها من تطبيقات كثيرة في المسائل الميكانيكية والكهربائية تعرف هذه الحدوديات بالعلاقة:

$$X_n(x) = B_n\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad n = 1,2,3,...$$

حيث B_n ثوابت متعلقة بالمسألة المطروحة وهي تعرف من المسألة نفسها.إن لهذه الحدوديات (وهي من الدرجة n) n جذراً حقيقياً مختلفاً على الفترة $(-1,1)$.

لنفرض أن $B_n = 1$ (دون أن يؤثر ذلك على عمومية المسألة) يمكن وضع الحدودية $(x^2-1)^n$ بالشكل التالي: $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$

والمشتقات الأولى لها حتى الرتبة $(n-1)$ تقبل $x = \pm 1$ جذراً لها وحسب

نظريـة رول فـإن المشـتق الأول لـه جـذر فـي الفتـرة $]-1, 1[$ والثـاني لـه جذران في الفترة نفسها وهكذا.

فإذا طبقنا مرة أخيرة نظريـة رول نجد أن المشتق من الرتبـة n يقبل n جذراً في الفترة $]-1, 1[$ عند $x = \pm 1$ وبفرض $B_n = 1$ (كما أشرنا) واستناداً لنظرية ليبتز في الاشتقاق المتكرر على الحدوديات ذات الشكل:

$$(x-1)^n (x+1)^n = (x^2-1)^n$$

نجد:

$$X_n(x) = (n+1)^n \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} + C`_n \frac{d(x+1)}{dx} \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}$$

$$+ .. + \frac{d^n(x+1)}{dx^n}(x-1)^n$$

ومن أجل $x = 1$ نجد: $X_n(1) = 2^n n!$

ومن أجل $x = -1$ نجد: $X_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$

نعوض في عبارة $X_n(x)$ فنجد: $B_n = \dfrac{1}{2^n . n!}$

نرمز بشكل عام لحدوديات ليجاندر بـ$P_n(x)$ علماً بأن $P_n(1) = 1$.

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

وحسب علاقة ليبتز يمكن البرهان على أن حدوديات ليجاندر تحقق:

$$(x^2-1) X``_n(x) + 2x X`_n(x) - n(n+1) X_n = 0$$

وهي تؤدي دوراً هاماً في نظرية حدوديات ليجاندر.

لنفترض أن　　　$y = (x^2 - 1)^n$

أي:　　　$y` = 2\,n\,x\,(x^2 - 1)^{n-1}$

وبالتالي:　　$(x^2 - 1)\,y` = 2\,nx\,(x^2 - 1)^{n-1}\,(x^2 - 1)$

$$(x^2 - 1)\,y` = 2\,nx\,y$$

لنأخذ المشتق فيه الرتبة $n + 1$ للمعادلة الأخيرة نجد:

$$(x^2-1)y^{n+2} + (n+1)(2x)y^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2}(2)y^{(n)} =$$
$$2\,n\,x\,y^{n+1} + (n+1)(2n)y^{(n)}$$

وبسهولة يمكن كتابة:

$$(x^2-1)y^{n+2} + (2x)y^{(n+1)} + n(n+1)\,y^{(n)} = 0$$

وعند الضرب بـB_n نحصل على العلاقة:

$$(x^2 - 1)\,X``_n(x) + 2\,x\,X`_n(x) - n\,(n+1)\,X_n(x) = 0$$

وهو المطلوب.

أمثلة على الدوال الخاصة

أ ـ احسب التكاملات التالية بواسطة الدالة غاما:

1. $I_1 = \int_0^\infty x^3.e^{-x}dx$

2. $I_2 = \int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx$

3. $I_3 = \int_0^\infty \sqrt{y}.e^{-y^2}dy$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

5. $I_5 = \int_0^\infty z^{-4z^2}dz$

الحل :

1. $$I_1 = \int_0^\infty x^3.e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{a-1}.e^{-x}dx$$

بالموازنة نلاحظ $a-1 = 3 \Rightarrow a = 4$

2. $$I_2 = \int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx$$

$$I_1 = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx = \int_0^\infty x^{a-1}.e^{-x}dx$$

نلاحظ هناك اختلاف بالأس في الدالة e^{-x} لهذا نفرض

نلاحظ أن حدود التكامل لا تتغير لهذا $2x = z$ $x = \frac{z}{2}$ $dx = \frac{dz}{z}$

بالتبديل نجد: $I_2 = \int_0^\infty \left(\frac{z}{2}\right)^6 .e^{-z} \frac{dz}{2} = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty z^6 .e^{-z} dz$

$$= \frac{1}{2^7}\Gamma(7) = \frac{6!}{2^7}$$

.3

$$I_3 = \int_0^\infty \sqrt{y}.e^{-y^2} dy$$

$$I_3 = \int_0^\infty \sqrt{y}.e^{-y^2} dy = \int_0^\infty y^{a-1}.e^{-y} dy$$

نلاحظ الاختلاف بين e^{-y} و e^{-y^2} لهذا نفرض:

$$y^2 = z \Rightarrow y = z^{\frac{1}{2}} \qquad y^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{4}}$$

$$dy = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{4}}.e^{-z}.z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{-\frac{1}{4}}.e^{-z} dz$$

$$a - 1 = -\frac{1}{4} \quad , \qquad a = \frac{3}{4}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ نفرض $-\ln x = z$ ومنه $x = e^{-z}$

$x = 0 \Rightarrow z = \infty$; $x = 1 \Rightarrow z = 0$ $dx = -\ e^{-z} dz$

$$I_4 = -\int_{\infty}^{0} \frac{e^{-z}dz}{\sqrt{z}} = \int_{0}^{\infty} z^{-\frac{1}{2}}.e^{-z}dz \quad \text{أي} \quad I_4 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

.5 $I_5 = \int_{0}^{\infty} a^{-4z^2} dz$

$$z^{4z^2} = e^{-y} \Rightarrow y = 4z^2 \ln a \Rightarrow \frac{y}{4} = z^2 \ln a$$

$$z = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{1}{\sqrt{\ln a}} \qquad dz = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\ln a}}.y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$z = 0 \to y = 0 \quad ; \quad z = \infty \Rightarrow y = \infty$$

$$I_5 = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{4}\sqrt{\ln a}}.y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{4\sqrt{\ln a}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\ln a}}$$

2 - احسب قيمة التكاملات الآتية بواسطة الدالة بيتا:

.6 $J_1 = \int_{0}^{1} x^2(1-x)^3 dx$	**.7** $J_2 = \int_{0}^{1} \frac{(2t)^2}{\sqrt{2}.\sqrt{1-t}}.2dt$
.8 $J_3 = \int_{y=0}^{y=a} y^4 \sqrt{a^4 - y^4} dy$	

الحل : $J_1 = \int_{0}^{1} x^2(1-x)^3 dx$

$$J_1 = \int_{0}^{1} x^2(1-x)^3 dx = \int_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

$$a - 1 = 2 \to a = 3 \quad ; \quad b - 1 = 3 \to b = 4$$

$$J_1 = \beta(3,4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2!.3!}{6!}$$

$$J_1 = \int_0^1 x^2(1-x)^3 dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

.7 $J_2 = \int_0^1 \frac{(2t)^2}{\sqrt{2}.\sqrt{1-t}}.2dt$

نلاحظ اختلاف حدود التكامل مع حدود الدالة $\beta\ (a,\ b)$ لهذا نجري التحويل $\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2dt$ وأما حدود التكامل فتصبح:

$$J_2 = \int_0^1 \frac{(2t)^2}{\sqrt{2}.\sqrt{1-t}}.2dt$$

$$J_2 = \sqrt{2}.2^2 \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^2.dt = 2^{\frac{5}{2}} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt$$

$$a-1 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad a = \frac{1}{2} \quad - \quad b\text{-}1 = 2 \ \rightarrow \ b = 3$$

$$J_2 = 2^5\ \beta\left(\frac{1}{2},3\right) = 2^{\frac{5}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)}$$

$$J_2 = \frac{2^{\frac{5}{2}}.2\sqrt{\pi}}{5.3.1\sqrt{\pi}} = \frac{2^{\frac{7}{2}}}{5!!}$$

.8 $J_3 = \int_{y=0}^{y=a} y^4\ \sqrt{a^4 - y^4}\, dy$

$$= \int_0^a a^2 \sqrt{1-\left(\frac{y}{a^c}\right)^4}\, y^4 dy$$

$$\frac{y}{a} = t \qquad y = a\,t \qquad y = 0 \Rightarrow \quad t = 0$$

$$y = a \Rightarrow t = 1$$

$$J_3 = a^3 \int_0^1 a^4 . t^4 \sqrt{1-t^4}\,.dt = a^7 \int_0^1 t^4 \sqrt{1-t^4}\,.dt$$

$$t^4 = z \qquad t = z^{\frac{1}{4}} \qquad dt = \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} dz$$

$$J_3 = a^7 \int_0^1 z(a-z)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} dz$$

$$J_3 = \frac{a^7}{4} \int_0^1 z^{\frac{5}{4}} (1-z)^{\frac{1}{2}} dz$$

$$a_1 = \frac{5}{4} \qquad b_1 = \frac{3}{2}$$

$$J_3 = \frac{a^7}{4} \beta\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^7}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2m-1}\theta . Sin^{2n-1}\theta \, dt$$

نجري التحويل $Sin^2\theta = t$ حيث $\theta = 0 \to t = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{2} \to t = 1$

$$2 Sin\theta \, Cos\theta \, d\theta = dt$$

$$d\theta = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t.(1-t)^m}{\sqrt{t(1-t)}}.\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\beta(m,n) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

يمكن استخدام النتيجة كدستور.

9. احسب التكامل: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^7\theta\, d\theta$

بالمقارنه مع $I_1 = \int_0^{\pi} Cos^{2m-1}\theta\, Sin^{2n-1}\theta\, d\theta$

نجد:

$$2m-1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$2n-1 = 7 \Rightarrow n = 4$$

$$I = \frac{1}{2}\,\beta\left(7,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(7)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(7+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{6!\sqrt{\pi}}{(13)!!\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^7}} = \frac{2^6.6!}{13!!}$$

10. احسب التكامل:

$$J = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^7}$$

نفرض $y^7 = t$ نلاحظ أن حدود التكامل لا تتغير لكن التكامل يصبح وفق مايلي: $y = t^{\frac{1}{7}}$, $dy = \frac{1}{7} t^{-\frac{6}{7}} dt$

$$I = \frac{1}{7}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{6}{7}}}{1+t}\,dt$$

نوازن مع التكامل: $I = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy$

فنجد: $a = \frac{1}{7}$ $a-1 = -\frac{6}{7}$

$$a+b=1 \Rightarrow b = \frac{6}{7}$$

$$I = \frac{1}{7}\,\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{7}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\right)} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{7} = \frac{\pi}{7Sin\frac{\pi}{7}}$$

تمارين غير محلولة
(Supplementary Problems)

أولاً : بواسطة الدوال الخاصة $\Gamma(a)$ و $\beta(a,b)$ احسب التكاملات التالية:

1. $\int_0^\infty x^7 e^{-x} dx$
2. $\int_0^\infty x^9 e^{-3x} dx$
3. $\int_0^\infty \sqrt[3]{y}.e^{-y^3} dy$
4. $\int_0^\infty 5^{-9z^2} dz$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$
6. $\int_0^\infty x^{12} e^{-3x^9} dx$
7. $\int_0^1 x^m (\lg x)^n dx$

ثانياً : احسب التكاملات التالية:

8. $\int_0^1 x^6 (1-x)^4 dx$
9. $\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{4-x}} dx$
10. $\int_0^a y^4 \sqrt{a^2-y^2}\, dy$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^8\theta\, d\theta$
12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^6\theta\, Cos^7\theta\, d\theta$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^4\theta\, d\theta$

.14 $\int_0^3 x\sqrt[3]{2^7-x^3}\,dx$ **.15** $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^6}$

.16 برهن على صحة ما يلي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2m-1}\theta\, Sin^{2n-1}\theta\, d\theta=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

.17 برهن على صحة ما يلي:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{6\sqrt{2\pi}}$$

.18 برهن أن:

$$\int_0^\infty Cosx^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

توجيه: استخدم تكاملات فرنييل.

.19 برهن على صحة التكامل :

$$\int_{-1}^1(1-t^2)^n dt=\frac{2^{n+1}n!}{1.3.5..(2n-1)}$$

.20 برهن على صحة التكامل :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2x}}{ae^{3x}+b}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}\ a^{\frac{5}{3}}\ b^{\frac{1}{3}}}$$

الفصل الثامن

تحويلات لابلاس

Laplace Transforms

مقدمة:

ليكن $F(t)$ دالةً مركبةً ذات متحول حقيقي t مستمر على الفترة $t \in (\alpha, \beta)$ التي قد تكون مفتوحة نفهم التكامل التالي: $\int_{\alpha}^{\beta} F(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} F(t)dt$

بأنه موجود عند وجود هذه النهاية حتى لو كانت الدالة غير مستمرة عند β أو α، وإذا كانت $t = \gamma$ تمثل نقطة انقطاع حيث $\alpha < \gamma < \beta$ عندما يمكن فهم وجود التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} F(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon} F(t)dt\, t + \lim_{\varepsilon_0\to 0} \int_{\gamma+\varepsilon_0}^{\beta} F(t)dt$

مفترضين وجود النهايتين ($\varepsilon \neq \varepsilon_0$ بالحالة العامة).

يمكننا تعميم ذلك في حالة وجود أكثر من نقطة انقطاع كذلك يمكن تعميم ذلك عندما تكون α أو β أو كلاهما معاً يسعيان إلى ∞ فنكتب:

$$\int_{\alpha}^{\beta\to\infty} F(t)dt = \lim_{l\to\infty} \int_{\alpha}^{l} F(t)dt$$

أو

$$\int_{-\infty}^{\beta} F(t)dt = \lim_{l\to\infty} \int_{l}^{\beta} F(t)dt$$

مفترضين وجود هذه النهايات.

وعندها نقول إن كلاً من التكاملين: $\int_{-\infty}^{\beta} F(t)dt \qquad \int_{\alpha}^{\infty} F(t)dt$

هو تكامل متقارب، وخلاف ذلك فالتكاملات متباعدة وإذا كان التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} |F(x)| dt$ متقارباً (حتى في حالة $\alpha = -\infty$ أو $\beta = +\infty$) نقول إن هذا التكامل متقارب مطلقاً (بالإطلاق).

تعريف (1):

ليكن $F(t, S)$ دالة وسيطية وسيطة $S \in D$ مركبة ومستمرة بالنسبة $t \in [\alpha, \infty[$ (ربما عدا بعض النقاط المنعزلة).

إذا كان $\int_{\alpha}^{\beta} F(t,S)dt$ متقارباً على D وكان $\int_{\alpha}^{t} F(t,s)dt$ متقارباً عندما $t \to \infty$ عندها نقول إن $\int_{\alpha}^{\infty} F(t,s)dt$ متقارباً بانتظام على D.

ملاحظة (1):

نقول عن قضية إنها محققة على فترة (α, β) باستثناء عدد منته من النقاط المنعزلة إذا لم تكن محققة على عدد محدود من النقاط على أية فترة محدودة مغلقة محتواه في (α, β).

. هناك شروط كافية لتقارب تكامل وسيطي بالإطلاق مع منطقة D وهي إمكانية مقارنته بتكامل حقيقي للدالة غير سالبة.

مبرهنة (1):

إذا كان $F(t, s)$ دالةً مركبةً ومستمرةً على الفترة $t \in [\alpha, \infty[$ وكانت $S \in D$ مركبة باستثناء عدد محدود من النقاط المنعزلة بالنسبة للمنطقة D وكان $F(t, s)$ تحليلياً على D مهما تكن $t \in [\alpha, \infty[$ وبفرض $\int_{\alpha}^{\infty} F(t,s)dt$ مقرون بواسطة تكامل متقارب للدالة غير سالبة وحقيقية من أجل كل منطقة مغلقة محتواه في D عندها كلاً من الدالتين (بالإطلاق).

$$\bar{F}(s) = \int_{\alpha}^{\infty} F(t,s)dt \qquad , \qquad \bar{F}`(s) = \int_{\alpha}^{\infty} F`(t,s)dt$$

تحليلي على D. (نقبل تلك المبرهنة دون إثبات).

المقصود بمقرون مرجوح بدالة حقيقية غير سالبة .

تعريف (2): بفرض $F(t)$ دالةً مستمرةً جزئياً ومعرفاً من أجل $t > 0$ نسمي التكامل $\int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)dt$ تحويل لابلاس للدالة $F(t)$

ملاحظة (2): إذا كان $F(t)$ معرفاً من أجل $t \in (0, \alpha)$ عندها لإيجاد تحويل لابلاس للدالة $F(t)$ نمدد هذه الدالة على الفترة $t \in (0 , \infty)$ حتى يكون $\int_{0}^{\infty} F(t).e^{-st}dt$ موجوداً نصطلح على أن: $F(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} F(t)$

$$F(\infty) = \lim_{t \to \infty} F(t)$$

الشروط الكافية لتحويل لابلاس :

بفرض $F(t)$ دالةً مركبةً مستمرةً على الفترة $(0 , \infty)$ ربما عدا بعض النقاط المنعزلة وإذا وجد عدد S_0 حقيقي يجعل التكامل $\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$ متقارباً (وهو أيضاً متقارباً مهما تكن $Re/ S_1 > S_0$ ومتباعداً عكس ذلك)،وإذا كان التكامل السابق متقارباً مهما تكن S عندما دعيت الرتبة $-\infty$ وإذا كان متباعداً مهما تكن S دعيت الرتبة ∞.

تعريف (3):

نقول إن الدالة $F(t)$ ذات مرتبة أسية γ إذا تحقق: $\lim_{t\to\infty} \left|e^{-\gamma t} F(t)\right| < M$

حيث M محدود و $\gamma < 0$ ، وإذا كانت الدالة $F(t)$ ذات مرتبة أسية محدودة عندها التكامل $\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$ $\bar{F}(s) = Lp[F(t)] = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \quad t > 0$ دالةً تحليليةً من أجل $Re(s) > S_0$ حيث S_0 لرتبة الأسية للدالة $F(t)$.

تعريف (4):

نسمي $F(t)$ المستمر على $(\alpha ، \infty)$ [ربما باستثناء عدد من النقاط المنعزلة] (وذو مرتبة أسية S_0 المحدودة) أصلاً للدالة $\bar{F}(s)$ حيث:

$\bar{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$ ونسمي $\bar{F}(s)$ صورة الأصل $F(t)$.

بعض الخواص الهامة لتحويل لابلاس:

1 . لنفرض $\bar{F_2}(s), \bar{F_1}(s)$ دالتان وسيطيتان ومعرفتان كما يلي:

$$\bar{F_1}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}F_1(t)dt \quad ; \quad \bar{F_2}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}F_2(t)dt$$

وليكن C_2, C_1 عناصر من حقل مركب C عندها

$$Lp[C_1(F_1(t))+C_2(F_2(t))]=C_1Lp\left[F_1(t)\right]+C_2Lp\left[F_2(t)\right]$$

الإثبات: واضح من تعريف تحويل لابلاس وخواص التكامل.

2 . بفرض $Lp\left[F(t)\right]=\bar{F}(s)$ وبفرض $\alpha>0$ عدد عندها

$$Lp[F(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}\bar{F}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

الإثبات: حسب تعريف تحويل لابلاس : $Lp\left[F(\alpha t)\right]=\int_0^{\infty} e^{-st}F(\alpha t)dt$

نبدل $\alpha t=z$ فيكون $dt=\frac{1}{\alpha}dz$ ومنه نجد:

$$Lp\left[F(z)\right]=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\alpha}z}F(z).\,dz$$

$$Lp\left[F(t\,\alpha)\right]=\frac{1}{\alpha}\bar{F}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

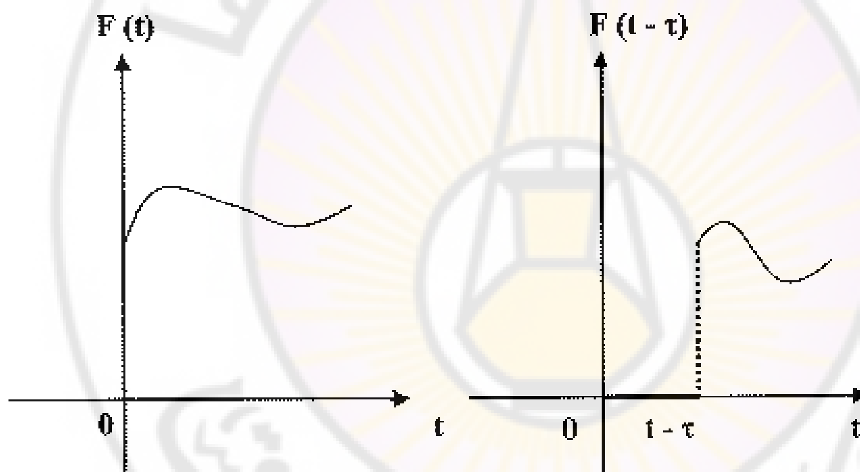
3 . بفرض $\bar{F}(s)=Lp[F(t)]$ وبفرض $\tau>0$ وإذا كان: $F(t)=0$ من أجل $t<\tau$ عندها: $Lp[F(t-\tau)]=e^{-s\tau}\bar{F}(s)$

بفرض $t - \tau = z$ ، $dt = dz$

عندها: $Lp[F(t-\tau)] = \int_0^\infty F(t-\tau).e^{-st}dt$

$$= \int_{-\tau}^{\infty} F(z).e^{-s(\tau+t)}dz = \int_{-\tau}^{0} F(z)_0.e^{-s(\tau+t)}dz + \int_0^\infty e^{-s\tau}.e^{-st}F(z)dz$$

$$= e^{-s\tau}Lp\,[F(t)] \Rightarrow Lp[F(t-\tau] = e^{-s\tau}\bar{F}(s)$$



4 . لنعرف الدالة : $\cup(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0\ , & other\ ways \end{cases}$

نسمي هذه الدالة دالة هافي سايد نلاحظ: $Lp[(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.1.dt =$

$Lp[(t)] = \frac{1}{s}$ وبذلك نجد: $Lp[(t)] = \frac{e^{3s}}{s}$

5 . لابلاس مشتقة دالة:

لنفرض $F(t)$ يحقق شروط تحويل لابلاس وليكن $\bar{F}(s) = Lp[F(t)]$ ولنحسب لابلاس الدالة المشتق $F`(t)$.

هنا نميز حالتين: أ . $F(t)$ مستمرة عندها: $Lp[F`(t)] = \int_0^\infty e^{-st} F`(t)dt$

$$Lp[F`(t)] = \int_0^\infty e^{-st} d(F(t)) = e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

$$Lp\left[F`(t)\right] = s\bar{F}(s) - F(o^+)$$

يمكن تعميم ذلك $Lp\left[F^{(n)}(t)\right] = s^n \bar{F}(s) - s^{n-1}F(O^+).......- F^{(n-1)}(O)$

ب . $F(t)$ متقطع عند $t = a$ نجد عندها:

$$Lp[F`(t)] = \int_0^a e^{-st}F`(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}F`(t)dt$$

نكرر ما سبق فنجد:

$$Lp[F`(t)] = e^{-st}F(t)\Big|_0^a + \int_0^a e^{-st}F(t)dt + e^{-st}F(t)\Big|_a^\infty + \int_a^\infty e^{-st}F(t)dt$$

$$= -F(O^+) + e^{-as}F(a^-) - e^{-as}F(a^+) + s\bar{F}(s)$$

$$Lp[F`(t)] = s\bar{F}(s) - F(O^+) - e^{-as}\left[F(\overset{+}{a}) - F(\overset{-}{a})\right]$$

يمكن تعميم ذلك على أكثر من نقطة انقطاع.

6 . لابلاس $G(t)=\int_0^t F(t)dt$ حيث $\bar{F}(s)=La[F(t)]$

من تعريف لابلاس مشتقة دالة : $G'(t)=F(t)$ ومنه نجد :

$$Lp[G'(t)=La[F(t)]$$

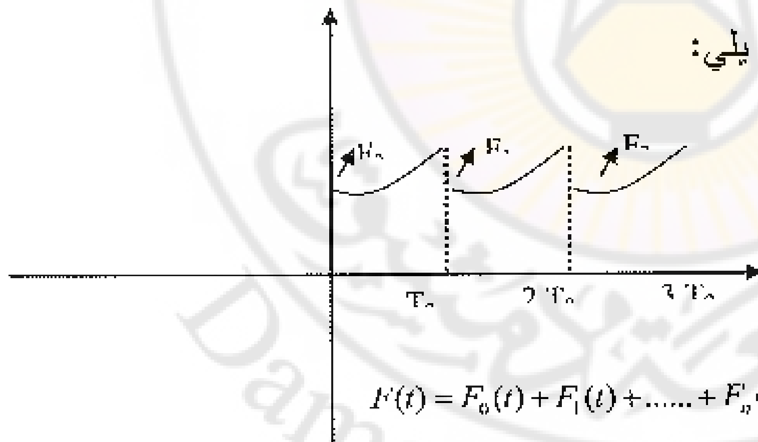
$$SG(s)-G(o)=\bar{F}(s)$$

لكن $G(o)=0$ عندها $G(s)=\dfrac{\bar{F}(s)}{s}$

$$Lp\left[\int_0^t F(t)dt\right]=\frac{\bar{F}(s)}{s}$$

يمكن تعميم ذلك: $Lp\left[\int_0^t \dots \left(\int_0^t F(t)dt\right).dt\right]=\dfrac{\bar{F}(s)}{s^n}$

7 . تحويل لابلاس للدالة الدورية $F(t)$ لنفرض أن الدور هو T_0 عندها يمكن كتابة $F(t)$ كما يلي:



نلاحظ أن: $F(t)=F_0(t)+F_1(t)+\dots\dots+F_n(t)+\dots$

حيث إن : $F_0(t)=\begin{cases}F(t) & 0<t<t_0\\ 0\ , & other\ ways\end{cases}$ وكذلك :

$$F_1(t)=\begin{cases}1 & T_0<t<2T_0\\ 0\ , & other\ ways\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_1(t)=F_0(t-T_0)\cup(t-T_0)$$

وبشكل عام: $F_n(t)=\begin{cases}F(t) & nT_0<t<(n+1)T_0\\ 0\ , & other\ ways\end{cases}$

أي: $F_n(t)=F_0(t-nT_0)\cup(t-nT_0)$

وبالتالي: $Lp[F(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}Lp\left[F_0(t-nT_0)\cup(t-nT_0)\right]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{F}(s).e^{-nT_0 s}$$

$$Lp[F(t)]=F(s)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nT_0 s}$$

$$=\bar{F}(s)\left[1+e^{-T_0 s}+e^{-2T_0 s}+\dots\right]$$

$$=\frac{F(s)}{1-e^{-T_0 s}}$$

لأن ما بين القوسين سلسلة هندسية أساسها $1> e^{-T_0 s}$

$$Lp[F(t)]=\frac{\int_0^{T_0}e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-T_0 s}}$$

8 . مبرهنة القيمة الأولية:

عند وجود النهاية يكون: $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\bar{F}(s)$

$$Lp[F`(t)] = \int_0^\infty e^{-st} F`(t)dt$$

$$s\bar{F}(s) - F(\overset{+}{o}) = \int_0^\infty e^{-st} F`(t)dt$$

نأخذ نهاية الطرفين عند $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\alpha} s\bar{F}(s) - F(\overset{+}{o}) = 0$$

لأن $F`(t)$ مستمر جزئياً من مرتبة أسية.

$$F(\overset{+}{o}) = \lim_{s\to\infty} s\bar{F}(s)$$

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\bar{F}(s)$$

9 . مبرهنة القيمة النهائية:

في حال وجود النهاية نجد: $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\bar{F}(s)$

لدينا: $Lp[F`(t)] = s\bar{F}(s) - F(\overset{+}{o})$

$$\int_0^\infty e^{-st} F`(t)dt = s\bar{F}(s) - F(\overset{+}{o})$$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = \lim_{s\to 0} s\bar{F}(s) - F(o^+)$$

$$\int_0^\infty F'(t)dt = \lim_{s\to 0} s\bar{F}(s) - F(o^+)$$

$$F(\infty) - F(o^+) = \lim_{s\to 0} s\bar{F}(s) - F(0^+)$$

$$F(\infty) = \lim_{s\to 0} s\bar{F}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\bar{F}(s)$$

تحويل لابلاس لبعض الدوال الأساسية:

Laplace Transforms of Some elementary Functions

1 . وجدنا أن الدالة هافي سايد يعرف كما يلي:

$$U(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0\,, & other\ ways \end{cases}$$

إذن: $$Lp[F(t)] = \int_0^\infty e^{-st}(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}.1.dt$$

وبالتالي: $$Lp[F(t)] = \frac{1}{s}$$

وبهذا نجد أن أي دالة نريد حساب تحويل لابلاس له يمكن كتابته:

$F(t) = F(t)U(t)$ وذلك من أجل $t > 0$

2 . تحويل لابلاس للدالة الثابت: $F(t) = a$ أي أن : $Lp[a.u(t)] = \frac{a}{s}$

3 . تحويل لابلاس للدالة الأسية: $F(t) = e^{at}u(t)$

$$Lp[e^{at}u(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.e^{at}.dt = \frac{1}{s-a}$$

4 . تحويل لابلاس للدالة : $F(t) = tU(t)$ أي: $Lp[F(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.t.dt$

ومنه يكون : $Lp[t\,u(t) = \frac{1}{s^2}$

5 . تحويل لابلاس للدالة : $F(t) = Sin\,at\,u(t)$

$$Lp[Sin\,at\,u(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{-iat} - e^{-iat}}{2i}\,dt = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

6 . تحويل لابلاس للدالة: $F(t) = Cosat\,U(t)$

$$Lp[Cosat.u(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{-iat} + e^{-iat}}{2}\,dt$$

$$Lp[Cosat.u(t)] = \frac{S}{S^2 + a^2}$$

7 . تحويل لابلاس للدالة : $F(t) = ShatU(t) \Rightarrow Lp[F(t)] = \frac{a}{s^2 - a^2}$

8 . تحويل لابلاس للدالة: $F(t) = Coh\,atU(t)$

$$Lp[F(t)] = \frac{S}{s^2 - a^2}$$

9 . تحويل لابلاس للدالة : $F(t)=t^cU(t)$

$$Lp[t^c u(t)]=\int_0^\infty e^{-st}t^c\,dt$$

نفرض $St=\tau$ فيكون : $dt=\frac{d\tau}{s}$ ، $t=\frac{\tau}{s}$

$$Lp\left[t^C u(t)\right]=\int_0^\infty e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^C\frac{d\tau}{s}=\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}\,\tau^C\,d\tau}{S^{C+1}}$$

$$Lp[t^C u(t)]=\frac{\Gamma(c+1)}{S^{C+1}}$$

وعندما $c=n$ نجد:

$$Lp\left[t^n u(t)\right]=\frac{\Gamma(n+1)}{S^{n+1}}=\frac{n!}{S^{n+1}}$$

التحويل المعاكس لتحويل لابلاس (مقلوب تحويل لابلاس):

The Inverse Laplace Transform:

تحويل لابلاس وتحويلات لابلاس لبعض الدوال الأساسية المعروفة تساعد على دراسة المسألة العكسية أي لنفرض لدينا دالة ما $\bar{F}(s)$ والمطلوب إيجاد الدالة $F(t)$ المحقق للمعادلة : $\bar{F}(s)=Lp[F(t)]$

سوف نسمي $F(t)$ أصل $\bar{F}(s)$ ونسمي $\bar{F}(s)$ صورة $F(t)$.

إن هذه العملية تدعى عملية إيجاد تحويل لابلاس العكسي $F(t)$ سوف ندرس حالات خاصة ثم ننتقل إلى الطريقة العامة لإيجاد التحويل العكسي $F(t)$.

1 . إيجاد أصل التحويل $\bar{F}(s+\mu)$

لدينا: $$\bar{F}(s)=Lp[F(t)]=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

لنبدل في العلاقة الأخيرة (مهما تكن S) كل S بالرمز $S+\mu$ نجد:

$$\bar{F}(s+\mu)=\int_0^\infty e^{-(s+\mu)t}F(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}.e^{-\mu t}F(t)dt$$

$$\bar{F}(s+\mu)=Lp[e^{-\mu t}F(t)]$$

$$Lp^{-1}[\bar{F}(\mu+S)]=e^{-\mu t}F(t)$$

تطبيق(1):

أوجد أصل الدالة $F(t)=e^{3t}S\text{int}\,u(t)$

الحل : لدينا : $Lp[F(t)]=Lp[S\text{int}]_{s\to s-3}$

$$Lp[F(t)]=\frac{1}{(s-3)^2+1}$$

2 . إيجاد أصل الدالة $\ddot{F}^{(n)}(s)$

الحل : لدينا:

$$\ddot{F}(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$\ddot{F}`(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-t)F(t)dt$$

$$\ddot{F}``(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-t)^2F(t)dt$$

$$\ddot{F}^{(n)}(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-t)^nF(t)dt=Lp[(-1)^nt^nF(t).u(t)]$$

$$Lp^{-1}\left[\ddot{F}^{(n)}(s)\right]=(-1)^nt^nF(t)u(t)$$

تطبيق(2): أوجد تحويل لابلاس للدالة: $F(t)=t\,Cost\,u(t)$

الحل : $Lp[F(t)]=-Lp[Cost]`$

$$= -\left[\frac{S}{s^2+1}\right]' = -\left[\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$Lp[F(t)] = \frac{S^2-1}{(S^2+1)^2}$$

3. إيجاد أصل الدالة $\int_0^\infty \bar{F}(s)\,ds$

لدينا $\bar{F}(s) = Lp[F(t)]$

$$\bar{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt\right)ds$$

ضمن شروط تحليلية نفترض تحققها نبدل الترتيب بين إشارتي التكامل أي نبدأ أولاً بالمكاملة بالنسبة للمتحول S ثم بالنسبة للمتحول t فنجد:

$$\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}F(t)ds\right)dt$$

$$= \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}F(t)}{t}F(t)\Big|_s^\infty\right)dt = \int_0^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt$$

$$\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = Lp\left[\frac{F(t)}{t}u(t)\right]$$

تطبيق(3):

احسب لابلاس الدالة $F(t)=\frac{S\operatorname{int}.u(t)}{t}$

الحل : لدينا $Lp\left[\frac{S\operatorname{int}}{t}.u(t)\right]=\int_{s}^{\infty}Lp[S\operatorname{int}]\,ds$

$$=\int_{s}^{\infty}\frac{ds}{s^{2}+1}=tg^{-1}s\Big|_{s}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-tg^{-1}S$$

ملاحظة(3):

يمكن إيجاد تحويل لابلاس العكسي لبعض الدوال بشكل مباشر إذا كانت تتشابه مع بعض الدساتير فمثلاً:

$$Lp^{-1}\left[\frac{1}{s^{2}+4}\right]=\frac{1}{2}Sin^{2}t\,u(t)$$

$$Lp^{-1}\left[\frac{s}{s^{2}+9}\right]=Cos3t.u(t)$$

$$Lp^{-1}\left[\frac{1}{s(s^{2}+1)}\right]=Lp^{-1}\left[\frac{\frac{1}{s^{2}+1}}{s}\right]$$

$$=\int_{0}^{t}Lp^{-1}\left[\frac{1}{s^{2}+1}\right]dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}S\operatorname{int}\,dt=-Cost\,\Big|_{0}^{t}=(1-Cost)u(t)$$

الطرق العامة لتحويل لابلاس العكسي:

بفرض $g_2(s), g_1(s)$ حدوديتان متعلقتان بالمتحول S ذات أمثال حقيقية وليس بينهما عوامل مشتركة وليكن: $F(s) = \dfrac{g_1(s)}{g_2(s)}$

كسراً جبرياً بسيطاً لنوجد التحويل المعاكس للدالة $\bar{F}(s)$

هنا نميز الحالات التالية:

أ . للدالة $g_2(s)$ جذور بسيطة $\alpha_1 \; .... \; \alpha_m$ عددها m ، عندها كما نعلم يمكن كتابة $\bar{F}(s)$ كما يلي: $\bar{F}(s) = \dfrac{A_1}{s-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{s-\alpha_2} + ... + \dfrac{A_m}{s-\alpha_m}$

$$Lp^{-1}\left[\bar{F}(s)\right] = \left(A_1 e^{\alpha 1t} + A_2 e^{\alpha 2t} + ... + A_m e^{\alpha mt}\right)u(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i . e^{\alpha it} u(t)$$

تطبيق(4):

احسب لابلاس الدالة $\bar{F}(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$

الحل : $\bar{F}(s) = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{s+3}$

$$A = \lim_{s \to -2} (s+2)\bar{F}(s) = 1$$

$$B = \lim_{s \to -3} (s+3) f(s) = -1$$

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$F(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\, u(t)$$

ب . عندما توجد جذور مضاعفة للدالة $g_2(s)$

لنفرض $S = \alpha$ جذر مكرر m مرة عندها: $g_2(S) = (S - \alpha)^m d(s)$

حيث $0 \neq d(s)$ ومنه :

$$\bar{F}(s) = \frac{g_1(s)}{g_2(s)} = = \frac{A_0}{(s-\alpha)^m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{s-\alpha} + E(s)$$

حيث $0 \neq E(s)$، وبالتالي : $\bar{F}(s) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{A_i}{(s-\alpha)^{m-i}} + E(s)$

وكما نعلم نتعين الثوابت A_i كما يلي:

$$Ai = \frac{1}{(i)!} \lim_{s\to\alpha} \left[(s-\alpha)^m \bar{F}(s) \right]^{(i)} \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

حيث (i) تعني الاشتقاق i مرة.

$$Lp^{-1}\left[\bar{F}(s)\right] = \sum_{k=1}^{m} A_{k-1} \frac{t^{m-k}}{(m-k)!} e^{\alpha t} u(t) + F_1(t)$$

حيث $F_1(t) = Lp^{-1}[E(s)]$

تطبيق(5):

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة: $\bar{F}(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2}$

الحل : $\bar{F}(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B_0}{(s-2)^2} + \frac{B_1}{(s-2)}$

$$A = \lim_{s \to 1} (s-1)\bar{F}(s) = 1$$

$$B_0 = \lim_{s \to 2} (s-2)^2 \bar{F}(s) = 1$$

$$B_1 = \lim_{s \to 2} \left[(S-2)^2 \bar{F}(s) \right]' = = \frac{-1}{(s-1)^2}\Big|_{s=2} = -1$$

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)}$$

وبأخذ لابلاس العكسي

$$F(t) = Lp^{-1}\left[\bar{F}(s)\right] = \left(e^t + te^{2t} - e^{2t}\right)u(t)$$

ج . عند وجود جذور عقدية للدالة $g_2(s)$ مثل: $S = \alpha + i\beta$

يكون $\bar{S}_1 = \alpha - i\beta$ الجذر الموافق ، وإذا كررنا ما سبق نجد عندها أن

$\bar{F}(S)$ يمكن كتابته: $\bar{F}(S) = \frac{As + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} + \bar{E}(s)$

لأن: $g_2(s) = \left[(s - s_1)(s - \bar{s}_1)\right]\bar{E}(s)$

ويمكن تعيين كلاً من A, B كما يلي:

$$\left[(s-\alpha)^2 + \beta^2\right]f(s) = [As + B] + [(s-\alpha)^2 + \beta^2]\,E(s)$$

نعوض S بقيمتها $\alpha + i\beta$ ونطابق بين الأقسام الحقيقية والوهمية بين الطرفين نجد: $\beta A = L$ $\quad A\alpha + B = k$

حيث k, L معلومة عندها: $A = \frac{L}{\beta}$, $B = K - \alpha \frac{L}{\beta}$

إذا عوضنا في عبارة $\bar{F}(s)$ نحصل على عبارة علمت فيها B, A عندها:

$$\bar{F}(s) = \frac{As + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} + \bar{E}(s)$$

$$F(t) = Lp^{-1}[f(s)] = Ae^{\alpha t} \ Cos\beta t + \frac{Ax + B}{\beta} .e^{\alpha t} \ Sin\beta t + \varphi^{-1}\left[\bar{E}(s)\right]$$

أي عبارة تحوي فيها دالة أسية و دالة مثلثية .

تطبيق(6):

أوجد التحويل المعاكس للدالة : $\bar{F}(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$

الحل : $\Lambda = 1 - 4 = 3 \Rightarrow S_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \ S_2 = -1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$\bar{F}(s) = \frac{A}{\left(S + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{B}{\left(S + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$F(t) = \left(A\, e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t} + B\, e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t}\right) u(t)$$

$$= \left(A\, e^{-\frac{t}{2}t} + e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + B\, e^{-\frac{t}{2}} .e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) u(t)$$

$$= (A\, e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + B\, e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}).e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

يمكن تعيين B, A وتحويل العبارة إلى عبارة مثلثية مضروبة بدالة أسية.

د . عندما يكون للدالة $g_2(s)$ جذور عقدية مكررة تكرر ب و ج.

مبرهنة الطي :The Convolution Theorem

بفرض $\bar{F}_2(s) = Lp[F_1(t)]$; $\bar{F}_1(s) = Lp[F_2(t)]$ عندها

$$Lp^{-1}\left[\bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s)\right] = \int_0^t F_1(u)\,F_2(t-u)\,du$$

$$= \int_0^t F_2(u)F_1(t-u)du$$

الإثبات:

إن المطلوب يكافئ العمل: $Lp\left[\int_0^t F_1(u)F_2(t-u)du\right] = \bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s)$

لدينا: $\bar{F}_1(s) = \int_0^\infty e^{-su}F_1(u)\,du$

نضرب الطرفين بالدالة $\bar{F}_2(s)$ وهي غير متعلقة بالمتحول u

$$\bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,\bar{F}_2(s)\,F_1(u)\,du$$

لكن: $e^{-su}\,\bar{F}_2(s) = Lp[F_2(t-u)]$

لهذا يكون : $\bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s) = \int_0^\infty Lp[F_2(t-u)]\,F_1(u)\,du$

$$= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-st}\, F_2(t-u)\, dt\right) F_1(u)\, du$$

ضمن شروط تحليلية نفترض وجودها وتحققها نبدل بين إشارتي التكامل فنجد:

$$\bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_0^{\infty} F_2(t-u)\, F_1(u)\, du\right) dt$$

لكن $F_2(t-4) = 0$ من أجل $u > t$ لهذا:

$$\bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_0^{t} F_2(t-u)\, F_1(u)\, du\right) dt$$

$$\bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s) = Lp\left[\int_0^{t} F_2(t-u)\, F_1(u)\, du\right]$$

$$Lp^{-1}\left[\bar{F}_1(s).\bar{F}_2(s)\right] = \int_0^{t} F_2(t-u)\, F_1(u)\, du$$

إن مبرهنة الطي تستخدم من أجل إيجاد تحويل لابلاس المعاكس لدالة $\bar{F}(s)$ باستخدام الخوارزمية التالية :

1 . نحلل $\bar{F}(s)$ إلى مضروب دالتين $\bar{F}_1(s)$ و $\bar{F}_2(s)$.

2 . نوجد $F_1(u) = Lp^{-1}\left[\bar{F}_1(s)\right]$ ، $F_2(u) = Lp^{-1}\left[\bar{F}_2(s)\right]$

3 . نطبق المبرهنة.

تطبيق(7): أوجد مقلوب تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$\bar{F}(s)=\frac{S}{(S^2+1)^2}$$

الحل :

$$\bar{F}_1(s)=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$\bar{F}_1(s)=\frac{s}{s^2+1} \qquad \bar{F}_2(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$F_1(u)=Cos\ u \qquad F_2(u)=Sin\ u$$

نختار إحدى الدالتين $F_2(u)$ أو $F_1(u)$ ونقوم بإزاحة t على أحدهما وليكن $F_2(u)$ أي نأخذ الدالة $Sin(t-u)$ وبعدها.

$$Lp^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\int_0^t Sin(t-u)Cos\ u\ du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left[S\text{int}+Sin(t-2u)\right]\right]du=\frac{1}{2}tS\text{int}+\frac{1}{4}Cos(t-2u)\Big|_0^t$$

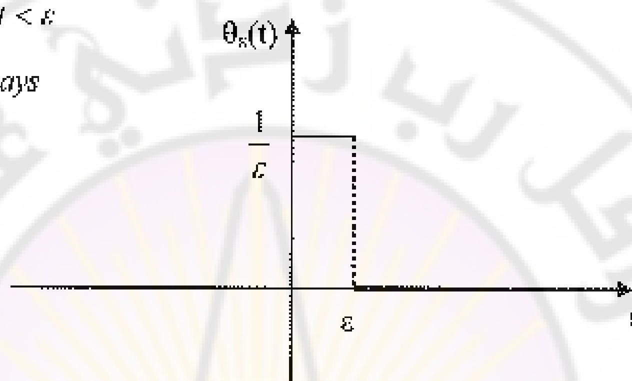
$$Lp^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\frac{t}{2}\sin t\ 1$$

تحويل لابلاس لبعض التوابع الخاصة:

Laplace Transforms for Some Special Functions:

1 . الدوال النبضية: لنعرف الدالة $\theta_\varepsilon(t)$ كما يلي:

$$\theta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & 0<t<\varepsilon\\ 0\ , & \text{other ways}\end{cases}$$



نلاحظ أن هذه الدالة تكون قيمتها كبيرة أكثر كلما كانت ε أصغر ويمكن تشبيهه بقوة كبيرة $\frac{1}{\varepsilon}$ تؤثر لفترة قصيرة ε ونلاحظ أيضاً:

$$\int_{\infty}^{\infty}\theta_\varepsilon d\theta=\int_{0}^{\varepsilon}\theta_\varepsilon(t)dt=1$$

لنعرف أيضاً الدالة $\delta(t)$ المسماة بدالة ديراك وهي تعرف كنهاية للدالة θ_ε (t) عندما $\varepsilon\to 0$ فنجد:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty\Leftarrow t=0\\ 0\Leftarrow t\neq 0\end{cases}$$

ونجد:

$$\int_{\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_\varepsilon(t)\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon} \theta_\varepsilon(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} . \varepsilon = 1$$

وهذه الدالة $\delta(t)$ تستخدم كعملية فيزيائية حدية ذات قيمة متناهية في الكبر عندما تطبق على فترة متناهية في الصغر بشكل نبضة واحدة.

من تعريف الدالة $\theta_\varepsilon(t)$ يمكن كتابة ما يلي: $\theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\left[U(t) - U(t-\varepsilon)\right]$

نلاحظ:

$$Lp\left[\theta_\varepsilon(t)\right] = \frac{1}{\varepsilon} Lp\left[U(t)\right] - \frac{1}{\varepsilon} Lp\left[U(t-\varepsilon)\right]$$

$$= \frac{1}{s\varepsilon} - \frac{e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}$$

$$Lp\left[\theta_\varepsilon(t)\right] = \frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon\, s} \Rightarrow \delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \theta_\varepsilon(t)$$

$$Lp\left[\delta(t)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} Lp\left[\theta_\varepsilon(t)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon\, s} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s\, e^{-\varepsilon s}}{s} = 1$$

كذلك نرى:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \theta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U(t) - U(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\delta(t) = U'(t)$$

وحسب خواص لابلاس مشتق لدالة:

$$Lp[\delta(t)] = Lp\left[U'(t)\right] = Lp\left[U(t)\right] - U(0)$$

$$Lp\left[\delta(t)\right] = \frac{S}{s} = 1$$

2 . تحويل لابلاس للدالة $F(t) = \ln t u(t)$

اعتماداً على النهاية التالية: $\lim_{t\to 0}(t\ln - t) = 0$ لأن:

$$\lim_{t\to 0} t(\ln t - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln t - 1}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

نجد بتطبيق خاصة مشتق لابلاس: $Lp[t\ln t] = -\bar{F}`(s)$

حيث $\bar{F}(s) = Lp[\ln t]$

$$Lp[t\ln t - t] = Lp[t\ln t] - Lp[t]$$

$$Lp[t\ln t - t] = -\bar{F}`(s) - \frac{1}{s^2}$$

لكن : $Lp[(t\ln t - t)`] = S\,Lp[t\ln t - t] - [t\ln t - t]_{t=0}$

$$= S\left[\left(-\bar{F}`(s)\right) - \frac{1}{S^2}\right]$$

$$Lp[(t\ln t - t)`] = -s\bar{F}`(s) - \frac{1}{S}$$

$$\bar{F}(s) + s\bar{F}`(s) = -\frac{1}{S} \quad \Rightarrow \quad [SF(s)]`_s = -\frac{1}{s}$$

نكامل: $C + S\bar{F}(s) = -\ln S$

$$S\bar{F}(s) = -\ln S - c$$

$$\bar{F}(s) = -\frac{\ln S + c}{s}$$

من أجل: $S = 1$ نجد: $\bar{F}(1) = -C$

حيث: $C = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = 0.573$

$$Lp[\ln t \, U(t)] = -\frac{hs + 0.577}{S}$$

3 . تحويل لابلاس للدالة $\delta(t)$:

$$Lp[\delta i(t)] = Lp\left[\int_0^t \frac{S\,\text{int}}{t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{s} Lp[S\,\text{int}\; u(t)] = \frac{1}{s}\int_s^{\infty} \frac{ds}{(s^2+1)}$$

$$= \frac{1}{s} tg^{-1}s\Big|_s^{\infty} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1}s\right) = \frac{ctg^{-1}s}{s}$$

4 . تحويل لابلاس للدالة $Ci(t)$: $Ci(t) = -\int_t^{\infty} \frac{Cost}{t} dt$

يبرهن أن تحويل لابلاس للدالة هو: $Lp\left[\int_t^{\infty} \frac{Cost}{t} dt\right] = -\frac{\ln(s^2+1)}{2S}$

ويبرهن أيضاً: $\vartheta[li(e^{+})] = -\ln\left(\frac{s-1}{s}\right)$ حيث $li(e^{+})$ دالة اللغارتم التكاملي.

5 . لقد عرفنا دالة بيسيل من الدرجة n كما يلي:

$$J_n(t)=\frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1-\frac{t^2}{2(2n+2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}+\frac{t^6}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+\ldots\right\}$$

هذه الدالة لها الصفات التالية:

1) $$J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)\qquad \forall\, n>0$$

2) $$J_{n+1}(t)=\frac{2n}{t}J_n(t)-J_{n-1}(t)$$

3) $$\frac{d}{dt}\left[t^n J_n(t)\right]=t^n J_{n-1}(t)$$

وعندما $n=0$ يكون: $J_0'(t)=-J_1(t)$

4) $$e^{\frac{1}{2}t\left(u-\frac{1}{u}\right)}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(t)u^n$$

والأخير هي الدالة المعممة لبيسيل.

دالة بيسيل تحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$t^2U''(t)+tU'(t)+(t^2-n^2)U(t)=0$$

لنوجد لابلاس $J_0(t)$

حسب التعريف: $$J_0(t)=1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\ldots$$

$$Lp[J_0(t)]=\frac{1}{s}-\frac{1}{2^2}\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{2^2.4^2}\frac{4!}{s^5}-\frac{1}{2^2.4^2.6^2}\frac{6!}{s^7}+\dots$$

$$=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{s^4}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{s^6}\right)+\dots\right]=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Lp\,[J_0(t)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

طريقة ثانية:

إن استخدمنا علاقة تعريف دالة بيسيل من الدرجة n ($n=0$ هنا) كحل للمعادلة التفاضلية التالية: $t\,J_0''(t)+J_0'(t)+t\,J_0(t)=0$

لنطبق تحويل لابلاس على الطرفين آخذين بالحسبان أن: $J_0(0)=1$ و $J_0'(0)=0$ وبفرض $Z(S)$ هو $Lp[J_0(t)]$ نجد:

وبالاختصار نجد: $$\frac{d\bar{Z}(s)}{ds}=-\frac{s\bar{Z}(s)}{s^2+1}$$

$$\frac{d\bar{Z}(s)}{\bar{Z}(s)}=-\frac{sds}{s^2+1}$$

$$\ln\bar{Z}(s)=-\frac{1}{2}\ln(s^2+1)$$

$$\ln\bar{Z}(s)=\ln\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Rightarrow\bar{Z}(s)=\frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

يمكن تعيين الثابت c من مبرهنة القيمة الأولية فنجد:

$$\lim_{s\to\infty} S\,z(s) = \frac{c.s}{\sqrt{s^2+1}} = c$$

$$\lim_{t\to 0} J_0(t) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$Lp[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

وحسب خاصة التحاكي: $Lp[J_0(at)] = \dfrac{1}{\sqrt{S^2+a^2}}$

من أجل حساب $\vartheta[J_1(t)]$ حيث $J_1(t)$ دالة بيسيل من الدرجة الأولى نجد من الخاصة: $J_0'(t) = -J_1(t)$

$$Lp[J_1(t)] = -Lp[J_0'(t)] \to = -[S\,Lp[J_0(t)] - J_0(0)]$$

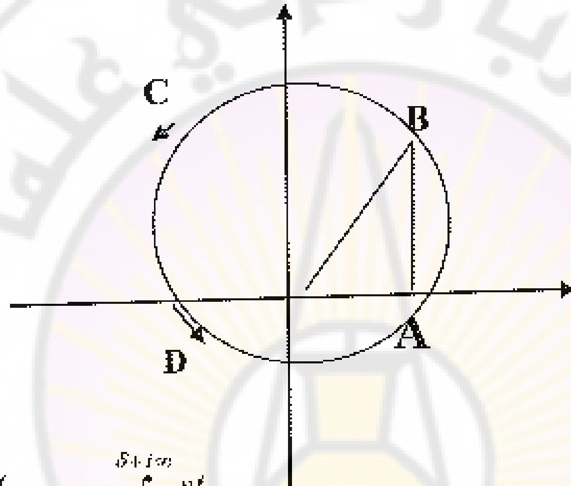
$$= +1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$$

الصيغة العقدية لتحويل لابلاس العكسي:

بفرض $\bar{F}(s) == \dfrac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}[F(t)]$ عندها تعطى الصيغة العقدية لتحويل لابلاس العكسي : $F(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st}\,\bar{F}(s)\,ds$

$F(t) = 0$ من أجل $t < 0$ وهذه الصيغة تعرف أيضاً بصيغة بروموينش.

إن التكامل السابق ينجز في المستوي العقدي (x,y) على المستقيم $x=\delta$ ويختار العدد δ بحيث يقع على يمين كل النقاط الشاذة وهو من جهة أخرى كيفي وفي الطريقة العملية فإن التكامل السابق ينجز على المحيط التالي المسمى محيط بروموينش.



إن التكامل السابق يصبح: $\lim\limits_{l\to\infty}\int_{\delta-il}^{\delta+il} e^{St}F(s)=\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{St}F(s) \quad ,\forall\, l$

إن محيط بروموينش السابق $ABCDA$ يحقق ما طلب من المنطقة D في الساحة العقدية لإنجاز تكامل الصيغة العقدية لتحويل لابلاس العكسي.

وحسب نظرية الرواسب فإن هذا التكامل.

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st}\bar{F}(s)\,ds=2\pi i\sum_{j=1}^{j=k}\operatorname{Res}\left[e^{st}\bar{F}(s),a_j\right]$$

حيث a_j الأقطاب الواقعة داخل محيط بروموينش بالتالي:

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\sum_{j=1}^{j=k}\operatorname{Res}\left[e^{st}F(s),a_j\right]$$

$$F(t)=\sum_{j=1}^{j=k}\operatorname{Res}\left[e^{st}\bar{F}(s),a_j\right]$$

تطبيق(8):

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة: $\bar{F}(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}$

الحل : نلاحظ أن أقطاب الدالة: $S_0=0$ $S_2=-i$ $S_1=i$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s^2+1)},0\right]=\frac{1}{0+1}=1$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s^2+1)},i\right]=\frac{e^{+it}}{i(-2i)}=-\frac{1}{2}e^{+it}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s^2+1)},-i\right]=\frac{e^{-it}}{-i(-2i)}=-\frac{1}{2}e^{-it}$$

$$F(ty)=\left[1-\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})\right]u(t)=(1-Cost)\,u(t)$$

تطبيقات تحويل لابلاس:

Applications of Laplace Transform:

لتحويل لابلاس تطبيقات عدة:

1 . حل بعض التكاملات المحددة.

2 . حل بعض المعادلات التفاضلية.

3 . حل جملة معادلات تفاضلية.

4 . حل المعادلات التكاملية.

1 . يمكن استخدام تحويل لابلاس لحساب : $I=\int_0^\infty e^{at}F(t)\,dt$

حيث يصبح التكامل I مساوياً لابلاس الدالة $F(t)$ من أجل $\delta=-a$

فمثلاً: $I=\int_0^\infty e^{3t}Sin2t\,dt=Lp\left[Sin2t\;u(t)\right]_{s=-3}$

$$=\left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s=-3}=\frac{2}{9+4}=\frac{2}{13}$$

$$I=\int_0^\infty J_0(t)dt=Lp\left[J_0(t)\right]_{s=0}=1$$

2 . تعطى المعادلة التفاضلية ذات الأمثال الثابتة ومن المرتبة *n* بالعلاقة:

$$Z^{(n)}(t)+\alpha_1Z^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_{n-1}Z'(t)+\alpha_nZ(t)=F(t)$$

حيث تعطى شروط البدء كما يلي: $Z(o), Z`(o),\dots, Z^{(n-1)}(o)$

معلومة كذلك الثوابت $\alpha_1, .. \alpha_n$ و الدالة $F(t)$ معلومة.

لنفرض أن $Lp[Z(t)] = \bar{Z}(s)$

لنطبق تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية فنجد علاقة جبرية بـ $\bar{Z}(s)$ وحدودية $\bar{D}(s)$ أي: $\bar{D}(s).\bar{Z}(s) = \bar{F}(s)$

ومنه

$$\bar{Z}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{D}(s)} \Rightarrow Z(t) = \vartheta^{-1}\left[\frac{\bar{F}(s)}{\bar{D}(s)}\right]$$

تطبيق(9):

أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية: $Z``(t) - 3Z`(t) + Z(t) = t$

$$Z(0) = Z`(0) = 0$$

الحل :

$$S^2\bar{Z}(s) - S(0) - Z`(0) - 3[S\bar{Z}(s) - Z(0)] + \bar{Z}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(S^2 - 3s + 1)\bar{Z}(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \bar{Z}(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 3s + 1)}$$

حسب الصيغة العقدية نجد:

$$F(t) = \sum_{\alpha=0}^{2} \operatorname{Re}s\left[\frac{e^{st}}{s^2(s^2 - 3s +)}, a_j\right]$$

$$\operatorname{Re}s\left[e^{st}\bar{F}(s), 0\right] = 1$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{st}\bar{F}(s),\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=\frac{4}{15+5\sqrt{5}}.e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)t}$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{st}\bar{F}(s),\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]=\frac{4}{15-5\sqrt{5}}.e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)t}$$

$$F(t)=1+4\left[\frac{1}{15+5\sqrt{5}}e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)t}+\frac{1}{15-5\sqrt{5}}e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)t}\right]$$

في بعض الأحيان عندما تصبح رتبة المعادلة التفاضلية عالية عندها يصعب تطبيق الطريقة السابقة لأن عملية إيجاد (تفريق الكسر) جذور $\bar{D}(s)$ عملية صعبة لهذا نلجأ لما يلي:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية المطلوب حلها مكتوبة بالشكل التالي:

$$Z^{(n)}(t)+\alpha_1 Z^{(n-1)}(t)+\alpha_2 Z^{(n-2)}(t)+\dots+\alpha_{n-1}Z'(t)+\alpha_n Z(t)=F(t)$$

ولنفرض أن: $Z(0),\quad Z'(0),\quad Z^{(n-2)},Z^{(n-1)}(0),F(t)$

كميات معلومة. وأن $Z(t)$ هي الدالة المجهولة.

نغير تسميه المجهول $Z(t)$ لنحصل على n معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى كما يلي: $x_1(t)=Z(t)$

$$x_1(t)=Z(t)$$

$$x_1'(t)=x_2(t)\quad,\quad x_2'(t)=x_3(t)$$

$$x_3^1(t) = x_4(t) \quad , \quad x_{n-1}(t) = x_n(t)$$

$$x_n^{`}(t) = -\alpha_n x_1 - \alpha_{n-1} x_2 ....\alpha_1 x_4 + F(t)$$

يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2^1(t) \\ \\ x_n^1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & ... & ... & ... & -\alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \\ \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ F(t) \end{bmatrix}$$

وهذا يكتب بشكل مختصر : $X^{`}(t) = Ax(t) + B(t)$ حيث:

$$X^{`}(t) = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ \\ \\ x_n^1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ F(t) \end{bmatrix}$$

لنطبق على المعادلة التفاضلية الخطية المصفوفية الأخيرة تحويل لابلاس فنجد: $Lp[x^{`}(t)] = ALp[x(t)] + Lp[B(t)]$

$$S\bar{X}(s) - x(0) = A\bar{X}(s) + \bar{B}(s)$$

حيث:

$$Lp[x(t)] = \bar{X}(s)$$

$$Lp[B(t) = \bar{B}(s)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(0) \\ Z'(0) \\ \\ Z^{n-1}(0) \end{bmatrix}$$

$$S\bar{X}(s) - A\bar{X}(s) = x(0) + \bar{B}(s)$$

$$[SI - A]\bar{X}(s) = [x(0) + \bar{B}(s)]$$

المصفوفة الواحدية من الدرجة n

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}(s) = [SI - A]^{-1}[x(0) + B(s)]$$

وبأخذ التحويل المعاكس للطرف الثاني تم اختيار السطر الأول منه نجد الدالة المجهولة $Z(t)$.

تطبيق(10):

أوجد حل المعادلة التفاضلية العادية الخطية التالية بعد ردها إلى معادلتين تفاضليتين خطيتين من المرتبة الأولى:

$$Z``(t) - 3\,Z`(t) + 2\,Z(t) = t \qquad t > 0$$

حيث $Z(0) = Z`(0) = 0$

الحل : لدينا $x_1 = Z$ ومنه $x_1^1(t) = x_2(t)$

$$x_2^1(t) = -2x_1 + 3x_2 + t$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة:

$$X`(t) = A\,X(t) + B(t)$$

نجد: $$\bar{X}(s) = [SI - A]^{-1}\left[X(0) + \bar{B}(s)\right]$$

حيث: $$\bar{X}(s) = Lp[X(t)]$$

$$\bar{B}(s) = Lp[B(t)]$$

$$[S\,I - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$[S.I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-3}{(s-1)(s-2)} & \dfrac{1}{(s-1)(s-2)} \\ \dfrac{-2}{(s-1)(s-2)} & \dfrac{s}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

$$[X(0) + B(0)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-3}{(s-1)(s-2)} & \dfrac{1}{(s-1)(s-2)} \\ \dfrac{-2}{(s-1)(s-2)} & \dfrac{s}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ \dfrac{1}{s(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

$$Z(t) = X_1(t) = Lp^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)(s-2)}\right]$$

$$Z(t) = X_1(t) = Lp^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)(s-2)}\right]$$

$$= A_0 Lp^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + A_1 Lp^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + BLp^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + CLp^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

بتعيين الثوابت بالطرق المعروفة نجد:

$$A_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad A_1 = \frac{3}{4} \quad , \quad B = -1 \quad , \quad C = \frac{1}{4}$$

$$Z(t) = \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - e^t + \frac{1}{4}e^{2t}\right)U(t)$$

3 . حل جمله معادلات تفاضلية خطية:

إن حل مثل هذه الجملة يعتمد على الدالة السابقة ولبكن اتباع الخوارزمية التالية:

أ . نطبق تحويل لابلاس على كل معادلة تفاضلية من الجملة السابقة (وهي بأكثر من دالة مجهولة).

ب . نحصل بذلك على جملة معادلات جبرية بعدة مجاهيل نحلها بالطريقة المناسبة.

ج . نطبق مقلوب تحويل لابلاس على الحلول فنحصل على حل الجملة.

تطبيق(11):

حل جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$Z'(t) - X'(t) = Sin\ t$$

$$Z'(t) + X'(t) = Cos\ t$$

حيث $Z(0) = X(0) = 1$

الحل : $Lp[Z'(t)] - Lp[X'(t)] = Lp[Sin\ t]$

$$S\bar{Z}(s)-Z(0)-S\bar{X}(s)+X(0)=\frac{1}{s^2+1}$$

بالإصلاح نجد :
$$\bar{Z}(s)-\bar{X}(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}$$

و كذلك بالنسبة للمعادلة الثانية : $Lp[Z'(t)]+Lp[X'(t)]=Lp[Cos\, t]$

نجد :
$$S\bar{Z}(s)-Z(0)-S\bar{X}(s)+X(0)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\bar{Z}(s)+\bar{X}(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{2}{s}$$

ولحل المعادلتين الجبريتين بـ $\bar{Z}(s),\bar{X}(s)$ نجد:

$$\bar{Z}(s)=\frac{1}{2s(s^2+1)}+\frac{1}{2(s^2+1)}+\frac{1}{s}$$

$$\bar{X}(s)=\frac{1}{2(s^2+1)}-\frac{1}{2(s^2+1)}+\frac{1}{s}$$

وبأخذ التحويل المعاكس للدالتين السابقتين نجد:

$$Z(t)=\frac{1}{2}\int_0^t S\text{int}\,dt+\frac{1}{2}S\text{int}+u(t)=\frac{1}{2}(-\cos t\Big|_0^t+\frac{1}{2}S\text{int}+u(t)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}Cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S\text{int}+1\right)u(t)=\frac{1}{2}(3-Cos t+S\text{int})u(t)$$

$$X(t)=\frac{1}{2}S\text{int}+u(t)-\frac{1}{2}\int_0^t Sin\,t\,dt\ \ X(t)=\frac{1}{2}S\text{int}+u(t)-\frac{1}{2}(\cos t|_0^t$$

$$=\left(\frac{1}{2}Sint+1+\frac{1}{2}Cost-\frac{1}{2}\right)u(t)$$

$$X(t)=\frac{1}{2}(Sint+Cost+1)\,u(t)$$

4 . حل المعادلات التكاملية:

نعرف المعادلة التكاملية لدالة ما $Z(t)$ بأنها علاقة تحوي الدالة $Z(t)$ ومشتقاتها المختلفة وتكامل تلك الدالة مع غيرها من 0 إلى t مثل المعادلة: $F(t)Z(t)+\alpha\int_0^t \beta(t,\theta)Z(\theta)d\theta=F(t)$

تسمى الدالة $\beta(t,\theta)$ نواة المعادلة التي تسمى بمعادلة فولتيرا أما إذا كان شكل المعادلة: $F(t)Z(t)+\alpha\int_0^t \beta(t,\theta)Z(\theta)d\theta=F(t)$

حيث b,a ثوابت و $F(t)$ كما في المعادلة السابقة دالة معلومة فإن هذه المعادلة تدعى بمعادلة فردهولم من المعادلات التكاملية الهامة المعادلة الخاصة التالية: $Z(t)=F(t)+\int_0^t \beta(t-\theta)Z(0)d\theta$

وتدعى معادلة فولتيرا من النوع الثاني أما إذا كان لها الشكل:

$$F(t)=\int_0^t \beta(t-\theta)Z(\theta)d\theta$$

فتدعى معادلة فولتيرا من النوع الأول.

إذا طبقنا تحويل لابلاس على معادلتي فولتيرا نجد على الترتيب:

$$\bar{Z}(s)=\frac{\bar{F}(s)}{1-\bar{\beta}(s)}$$

وكذلك :

$$\bar{Z}(s)=\frac{\bar{F}(s)}{\bar{\beta}(s)}$$

حيث $\bar{\beta}(s)=Lp[\beta(t)]$ و $\bar{Z}(s)=Lp[Z(t)]$

$$\bar{F}(s)=Lp[F(t)]$$

تطبيق(12):

أوجد حل المعادلتين التكامليتين التاليتين:

$$Cht=\int_0^t e^{3(t-v)}z(v)dv$$

$$Z(t)-\int_0^t Sin(t-v)Z(v)dv=S\,\text{int}$$

الحل : لحل المعادلة الأولى نطبق تحويل لابلاس فنجد:

$$Lp[Cht]=Lp\left[\int_0^t e^{3(t-v)}z(v)dv\right]$$

$$\frac{s}{s^2-1}=\frac{1}{s-3}\bar{Z}(s)$$

$$\tilde{Z}(s) = \frac{s(s-3)}{s^2-1} = \frac{s^2}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}$$

$$= \frac{s^2-1+1}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}$$

$$\tilde{Z}(s) = 1 + \frac{1}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}$$

$$Z(t) = (1 + Sht - 3Cht)\, u(t)$$

وإذا طبقنا التحويل على المعادلة الثانية: $\tilde{Z}(s) - \frac{1}{s^2+1} Z(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\tilde{Z}(s)\frac{(s^2+1-1)}{(s^2+1)} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \tilde{Z}(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Z(t) = t\,u(t)$$

تحويل Z وعلاقته بتحويل لابلاس *(Z-TransForm)*:

تعريف(5):

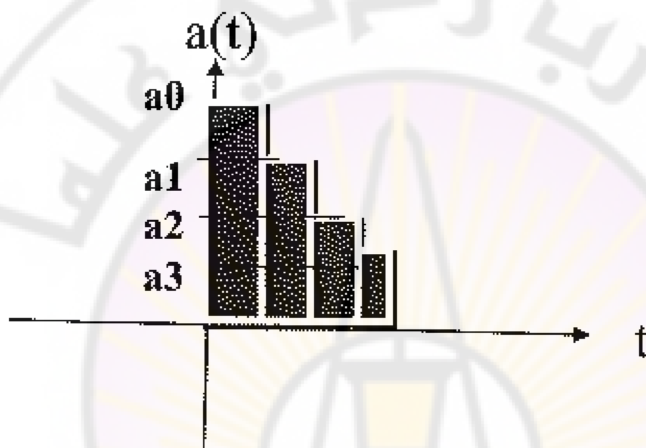
لتكن $\{a_n\}$ متوالية أعداد عقدية نعرف تحويل Z لـ$\{a_n\}$

كما يلي: $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{-n}$

حيث Z متحول عقدي. إن هذا التحويل موجود ،وهو سلسلة لورانت وهي متقاربة من أجل $|Z|>1$. يرتبط هذا التحويل مع تحويل لابلاس بالعلاقة التالية:

$$A(z) = \left\{ \frac{s}{1-e^{s}} Lp\left[a(t)\right] \right\}_{e^{s} \to z}$$ أي نبدل $e^{s} \to z$

فنلاحظ أن $a(t) = a_n$ من أجل $n < t < n+1$ حيث $n = 0,1,2,....$



$$a(t) = a_0[u(t) - U(t-1)] + a_1[U(t-1) - U(t-2)]$$

$$+ a_2[U(t-2) - U(t-3)] + ...$$

وبأخذ تحويل لابلاس نجد :

$$Lp[a(t)] = a_0 \frac{1-e^{-S}}{S} + a_1 \frac{e^{-s}-e^{-2S}}{S} + a_2 \frac{e^{-2S}-e^{-3S}}{S} + ..$$

$$= a_0\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right) + a_1.e^{-S}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)$$

$$+ a_2.e^{-2S}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right) + a_3.e^{-3S}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right) + ...$$

$$= \left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)\sum_0^{\infty} a_n.e^{-ns}$$

$$\sum_0^{\infty} a_n.e^{-nS} = \frac{S}{1-e^{-S}} Lp[a(t)]$$

بفرض $Z = e^S$ حيث $1 < |Z|$

$$\sum_0^{\infty} a_n Z^{-n} = \left\{\frac{S}{1-e^{-S}} Lp[a(t)]\right\}_{e^S \to Z}$$

$$A(z) = \left\{\frac{S}{1-e^{-S}} Lp[a(t)]\right\}_{e^S \to Z}$$

وهو المطلوب.

تمارين محلولة

1 . احسب لابلاس الدالة:

$$F(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 4 \\ 0 & , other\ ways \end{cases}$$

الحل : نأخذ لابلاس الدالة: $Lp[F(t)] = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$

$$= \int_0^4 e^{-st}(2) dt + \int_4^\infty e^{-st}(0) dt$$

$$= -\frac{2}{s} e^{-st} \Big|_0^4 = \frac{1 - 2e^{-4s}}{s}$$

2 . احسب لابلاس الدالة:

$$F(t) = 4e^{3t} + Sin\frac{t}{3} + Cos 4t \qquad t > 0$$

الحل : نأخذ لابلاس الطرفين : $Lp[F(t)] = \frac{4}{s-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{9}} + \frac{s}{s^2 + 16}$

3 . احسب لابلاس الدالة: $F(t) = t^2 e^{3t}$

الحل :نأخذ لابلاس الطرفين : $Lp[F(t)] = Lp[t^2]_{s \to s-3} = \frac{2}{(s-3)^3}$

4 . احسب لابلاس الدالة: $F(t) = t^2 . \cos t . U(t)$

الحل :لدينا الدالة : $F(t) = t^2 \, Cos \, t$

نأخذ لابلاس الطرفين : $Lp\left[(-t)^n F(t)u(t)\right] = F(s)^{(n)}_{(s)}$

نطبق خاصة الاشتقاق : $Lp\left[t^2 Cost u(t)\right] = Lp\left[Cost\right]'' = \left(\frac{S}{s^2+1}\right)''$

$$= \left[\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right]' = \left[\frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}\right]'$$

$$= \frac{-2s(1+s^2)^2 - 2(2s)(1+s^2)(1-s^2)}{(1+s^2)^4}$$

$$= \frac{-2s - 2s^3 - 4s + 4s^3}{(1+s^2)^3} = \frac{2s^3 - 4s}{(1+s^2)^3} = \frac{2s(s^2-2)}{(1+s^2)^3}$$

5 . أوجد لابلاس الدالة الدورية: $F(t) = \begin{cases} S\operatorname{in}t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$

الحل : نلاحظ أن دور الدالة $T_0 = 2\pi$

نأخذ لابلاس الدالة : $Lp\left[F(t)\right] = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{\int_0^{\pi} e^{-st}S\operatorname{in}t\,dt}{1-e^{-2\pi s}}$

نأخذ التكامل التالي : $I = \int_0^{\pi} e^{-st} S\operatorname{in}t\,dt$

و تكامل بالتجزئة : $du = Cos\, t\, dt$ $\qquad u = Sin\, t$

$$e^{-st}\,dt = dv \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$I = -\frac{e^{-st}\,Sin\,t}{s}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{s}\int_0^{\pi} e^{-st}Cos\,t\,dt$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{-st}Cos\,t\,dt$$

$$u_1 = Cos\,t \qquad d\,u_1 = -\,Sin\,t\,dt$$

$$e^{-st}\,dt = dv \qquad v = -\frac{1}{s}.e^{-st}$$

$$I_1 = -Cos\,t\,e^{-st}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{s}\int_0^{\pi} e^{-st}Sin\,t\,dt$$

$$I_1 = e^{-st} - 1 - \frac{1}{s}I$$

$$I_1 = \frac{1}{s}\left[e^{-s\pi} - 1 - \frac{1}{s}I\right] = \frac{e^{-s\pi} - i}{s} - \frac{1}{s^2}I$$

$$I.\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{e^{-s\pi} - 1}{s} \Rightarrow I = \frac{s(e^{-s\pi}-1)}{s^2+1}$$

نعوض I في لابلاس الدالة : $Lp[F(t) = \dfrac{s(e^{-s\pi}-1)}{(s^2+1)(1-e^{-2\pi s})}$

$$Lp[F(t)] = \frac{-S}{(s^2+1)(1+e^{-s\pi})}$$

6 . احسب التكاملين التاليين بواسطة تحويل لابلاس:

أولاً: التكامل التالي :

$$I_1 = \int_0^\infty t.e^{-5t} Cost\, dt$$

الحل : نلاحظ أن : $I_1 = Lp[t \cos t\, u(t)]_{s=5}$

اعتماداً على لابلاس مشتقة دالة :

$$I_1 = \left\{ -\left[\frac{S}{s^2+1} \right] \right\}'_{s=5}$$

بالاشتقاق مرة واحدة نجد : $I_1 = \left. \frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \right|_{s=5} = -\frac{1-25}{676}$

$$I_1 = \frac{24}{676} = \frac{6}{169}$$

ثانياً : التكامل التالي: $I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} dt = Lp\left[\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} \right]_{s=0}$

$$= \left\{ \int_0^\infty Lp\left[e^{-t} - e^{-3t} \right] ds \right\}_{s=0}$$

$$=\left\{\int_{s}^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)ds\right\}_{s=0}$$

$$=\left\{\ln\frac{s+1}{s+3}\Big|_{s}^{\infty}\right\}_{s=0}$$

$$I_2=-\ln\frac{1}{3}=\ln 3$$

7. حل المعادلة التفاضلية التالية بواسطة تحويل لابلاس:

$$Z''(t)+Z'(t)+Z(t)=u(t)$$

حيث $Z(0)=Z'(0)=2$

الحل :

نأخذ لابلاس الطرفين : $Lp[Z'']+Lp[Z']+Lp[Z]=\frac{2}{s}$

نستخدم خاصة الاشتقاق :

$$S^2\bar{Z}(s)-SZ(0)-Z'(0)+S\bar{Z}(s)-Z(0)+Z(s)=\frac{2}{s}$$

$$\bar{Z}(s)(s^2+s+1)=\frac{2}{s}+2s+4$$

$$\bar{Z}(s)=\frac{2}{s(s^2+s+1)}+\frac{2s}{s^2+s+1}+\frac{4}{s^2+s+1}$$

$$\frac{2}{s(s^2+s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{BS+e}{s^2+s+1}$$

بالمطابقة تتعين الثوابت $A=2; \quad B-2, \quad C=-2$

$$\frac{2}{s(s^2+s+1)}=\frac{2}{s}-\frac{2s+2}{s^2+s+1}$$

$$=\frac{2}{s}-2\frac{s+1}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{2}{s}-2\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

نصلح المقدار بحيث يصبح جاهزاً لتطبيق لابلاس العكسي للطرفين :

$$=\frac{2}{s}-2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-2\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

نأخذ لابلاس العكسي للطرفين :

$$Lp^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+s+1)}\right]=U(t)+\left(-2Cos\frac{\sqrt{3}}{2}te^{-\frac{t}{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}Sin\frac{\sqrt{3}}{2}te^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$$

$$=\left[1-2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}te^{-\frac{t}{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}Sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.e^{-\frac{t}{2}}+2Cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.e^{-\frac{t}{2}}+2\sqrt{3}Sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.e^{-\frac{t}{2}}\right]U(t)$$

فالحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$Z(t)=\left[1+\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)Sin\frac{\sqrt{3}}{2}+e^{-\frac{t}{2}}\right]u(t)$$

8 . احسب تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$\tilde{F}(s)=\frac{4s+12}{s^2+8s+16}=\frac{4(s+3)}{(s+4)^2}$$

نفرق الكسر :

$$\tilde{F}(s)=\frac{A_0}{(s+4)^2}+\frac{A_1}{s+4}$$

$$A_0=\lim_{s\to -4}(s+4)^2\ \tilde{F}(s)=\frac{4(-4+3)}{1}=4$$

$$A_1=\lim_{s\to 4}\left[(s+4)^2\tilde{F}(s)\right]^1=4$$

$$\tilde{F}(s)=\frac{4}{s+4}-\frac{4}{(s+4)^2}$$

نأخذ لابلاس العكسي للطرفين :

$$F(t)=Lp^{-1}\left[\frac{4}{s+4}\right]-4\,Lp^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^2}\right]$$

$$=\left(4\,e^{-4t}-4t.e^{-4t}\right)u(t)$$

9 . حل جملة المعادلتين التاليتين:

$$Z`(t)=2.Z(t)-3X(t)$$

$$X`(t)=X(t)-2Z(t)$$

الحل : بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة الأولى :

$$Lp[Z`(t)]=2Lp[Z(t)]-3Lp[X(t)]$$

$$Lp`[X`]=Lp[X(t)-2Lp[Z(t)]$$

$$S\bar{Z}(s)-Z(0)-2\bar{Z}(s)+3\bar{Z}(s)=0$$

$$(s-2)\bar{Z}(s)+3X(s)=8$$

كذلك بأخذ تحويل لابلاس للثانية :

$$S\bar{X}(s)-X(0)=\bar{X}(s)-2\bar{Z}(s)$$

$$(s-1)\bar{X}(s)+2\bar{Z}(s)=3$$

كنحل المعادلتين الجبريتين بـ $\bar{X}(s),\bar{Z}(s)$ فنجد:

$$\bar{Z}(s)=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}=\frac{8s-17}{(s-4)(s+1)}$$

$$\bar{X}(s)=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{(s-4)(s+1)}$$

$$\bar{X}(s)=\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s+1}\qquad A=-2\qquad B=5$$

نأخذ لابلاس العكسي للطرفين :

$$X(t)=(-2e^{4t}+5e^{-t})\,u(t)$$

$$\bar{Z}(s)=\frac{C}{s-4}+\frac{D}{s+1}\qquad C=3\qquad D=5$$

نأخذ لابلاس العكسي للطرفين : $Z(t)=(3e^{4t}+5e^{-t})\,u(t)$

إن $Z(t)$ و $X(t)$ هما حل جملة المعادلتين .

10 . حل المعادلة التكاملية التالية: $Z(t)-2\int_0^t e^{-(t-v)} Sinv dv = t$

الحل : $Lp[Z(t)]-2\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}$

$$Lp[Z(t)]=\frac{2}{(s+1)(s^2+1)}+\frac{1}{s^2}$$

نأخذ لابلاس العكسي للطرفين :

$$Z(t)=2\int_0^t e^{-u}\ Sin(t-u)\ du+t$$

$$=2I+t$$

$$I=\int_0^t e^{-u} Sin(t-u) du$$

وبحساب التكامل I بالتجزئة مرتين نجد:

$$I=\frac{e^{-t}-(S\text{int}+Cost)}{2}$$

$$Z(t)=\left[t+e^{-t}-(S\text{int}+Cost)\right]u(t)$$

وهو الحل الخاص للمعادلة التكاملية المعطاة .

الباب الثالث

9. المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية وطرق حلها (المعادلات ذات النمط الزائدي)

10. المعادلات ذات النمط المكافئ

11. المعادلات ذات النمط الناقص


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع

المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية

Partial differential equations of Second order

مقدمة:

إن موضوعات هذا الفصل ترتبط ارتباطاً وثيقاً بدراسة مختلف العمليات الفيزيائية التي تدرس مضوعات نظرية المرونة والكهرديناميك وغيرها من المسائل التي تشترك بالجوهر وتختلف في نطاق التطبيق.

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية معادلات رياضية فيزيائية وحلها الرياضي هو حل للمسائل الفيزيائية والهندسية الميكانيكية و الكهربائية.

سوف نعرف المعادلات التفاضلية الجزئية ثم نصنفها ونضرب أمثلة على أنواع شهيرة منها ندرس بعضها بالتفصيل والبعض الآخر بإيجاز.

تعريف (1):

المعادلة التفاضلية الجزئية بمتغيرين مستقلين: هي علاقة تربط بين دالة لمتحولين $U(x,y)$ ومشتقاتها الجزئية من المرتبة الثانية كما يلي :

$$F(U(x,y),U_x,U_y,U_{xx},U_{xy},U_{yy})=0$$

إن المشتقات الجزئية للدالة $U(x,y)$ من المرتبة الأولى والثانية على الترتيب.

يمكن تعميم هذا التعريف على دوال بأكثر من متحولين مستقلين.

$$F(U(x,y),U_x,U_y,U_{xx},U_{xy},U_{yy})=0 \quad (1)$$

إذا كان شكل المعادلة هو التالي:

$$A.U_{xx}+2B.U_{xy}+C.U_{yy}+F(x,y,U(x,y),U_x,U_y)=0$$

نسمي (1) معادلة خطية بالنسبة لمشتقات المتحولين x , y حيث إن المعاملات $A,B,C...$ تابعة للمتحولين x ,y وعلى المشتقات الجزئية دعيت المعادلة معادلة شبه خطية.

كما نسمي (1) معادلة خطية بشكل عام إذا كانت خطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا وبالنسبة للتابع U ومشتقاته الأولى كما في المعدلة التالية:

$$A.U_{xx}+2B.U_{xy}+C.U_{yy}+A_1\,U_x+B_1U_y+C_1U(x,y)+D=0 \quad (2)$$

حيث المعاملات جميعها دوال للمتحولين x, y فقط، وعندما تكون المعاملات في (2) غير متعلقة بالمتحولين y,x تسمى المعادلة خطية بأمثال ثابتة وإذا انعدم D سميت معادلة متجانسة.

إن جوهر الحل هو إمكانية تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية جزئية بسيطة وفق تحويل ما (له تحويل عكسي) غير شاذ. لن ندخل كثيراً في هذا المنحى وسوف نعتبر أن هذا التحويل معروف لدينا.

مثال(1):

بين نوع ومرتبة المعادلة التفاضلية فيما يلي :

1. $U_{xx}+2x.U_{xy}+y.U_{yy}+2.U_x+6.U_y+3.U(x,y)+12xy=0$

2. $U_{xx}+2.U_{xy}+9.U_{yy}+4.U_x+xy=0$

3. $3.U_{xx}+3.U_{yy}+7.U_x+U_y+U(x,y)=0$:

الحل :

1. المعادلة الأولى تفاضلية جزئية مرتبة ثانية غير متجانسة وذات أمثال متغيرة .

2. المعادلة الثانية تفاضلية جزئية مرتبة ثانية غير متجانسة ذات أمثال ثابتة .

3. المعادلة الأولى تفاضلية جزئية مرتبة ثانية متجانسة وذات أمثال ثابتة .

المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية والنمط الزائدي

يصادفنا هذا النمط من المعادلات عند دراسة الكثير من المسائل الفيزيائية المتعلقة بالاهتزازات وأبسط أشكال هذا النمط هو:

$$U_{xx}-U_{yy}=0 \Rightarrow U_{xx}=U_{yy}$$

هذا النمط يمثل اهتزاز خيط مرن في مستو شاقولي.

صياغة المسائل الحدية:

أ. معادلة اهتزاز خيط مرن في مستو شاقولي

لندرس هذه المسألة في المستوي $(x, U(x,t))$ حيث يمثل x محور الفواصل الذي ينطبق عليه الخيط ومحور التراتيب $U(x,t)$ الذي يتم وفقه (ووفقه فقط) اهتزاز حركة مستوية شاقولية .

نفرض الشروط التالية :

1. الخيط متجانس له كتلة واحدة في واحدة الطول.

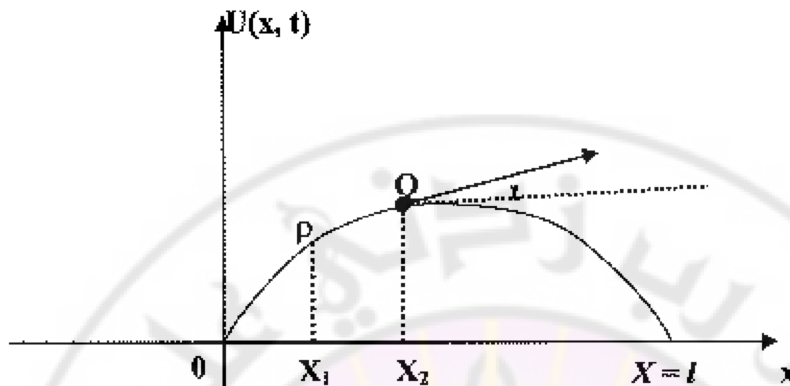
2. قابل للانثناء.

3. الحركة تتم في المستوي (x, u) و شاقولية فقط.

4. نصف الحركة بالدالة $U(x,t)$ حيث t هو الزمن و x الفاصلة.

ملاحظة (1)

نقول إن الخيط قابل للانثناء إذا كانت قوى الشد الناتجة عن الاهتزاز بالخيط ذات محصلة مماسية فقط وهذا يعني أن الوتر (الخيط) لا يقاوم الانثناء ، و يمكن أن نحسب قوى الشد الناتجة عن الاهتزاز (الاهتزازات صغيرة) وفق قانون هوك الذي يهمل عند استخدامه مربع السرعة (U_x^2) بالمقارنة مع الواحد الصحيح.



وحيث l طول الوتر.

نحسب الاستطالة التي تحدث بالوتر (جزء الوتر $\overline{\rho Q}$) اعتماداً على ما سبق.

إن طول القوس في جزء المسقط $x_1\,x_2$ يعطى بالعلاقة:

$$\delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+U_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = \Delta x$$

أي بشكل آخر يمكن أن نعد $\overline{\Delta S} = \overset{\frown}{\rho Q} = x_2 - x_1$ وفق هذا الاصطلاح لا تحدث استطالة لجزء الوتر المهتز في أثناء عملية الاهتزاز.

وحسب قانون هوك ينتج أن مقدار الشد في كل نقطة غير متعلق بالزمن وهو لا يعتمد على الفاصلة x أي:

$$T(x) = T_0 = cons\ t$$

لنرمز بالرمزين Tx,Tu لمسقطي قوى الشد على محور السينات ومحور التراتيب أي:

$$Tx(x)=T(x)Cos\alpha \approx \frac{T(x)}{\sqrt{1+U_x^2}} \approx T(x)$$

$$Tu(x)=T(x)Sin\alpha \approx T(x)tg\alpha \approx T(x)Ux$$

حيث α زاوية صغيرة وهي زاوية الماس مع محور الفواصل للمنحني $U\ (x,t)$.

لندرس القوى المؤثرة على الجزء $\Delta \approx x_1x_2$ تؤثر على هذا الجزء قوى الشد وقوى خارجية وقوى القصور الذاتي وبما أنه لا يوجد حركة أفقية لهذا فإن محصلة مساقط هذه القوى الأفقية معدومة وحسب افتراضنا فإن الحركة شاقولية على امتداد المحور $U\ (x,t)$ ولهذا يكون:

$$T(x_1)=T(x_2)\ \Rightarrow Tx(x_2)=Tx(x_1)$$

أي $$T(x) = T_0$$

وحسب القانون الثاني لنيوتن القائل بأن محصلة القوى المؤثرة تساوي إلى مضروب الكتلة المتحركة بالتسارع يمكننا استنتاج معادلة اهتزاز الوتر.

إن مركبة كمية الحركة جزء الوتر $\overline{\Delta S}$ على المحور U تساوي:

$$\int_{x1}^{x2} U_t(\varepsilon,t)\rho(\varepsilon)d\varepsilon$$

حيث ρ الكثافة الخطية للوتر.

إن التغير في كمية الحركة خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ أي:

$$\int_{x1}^{x2} \rho(\varepsilon)[U_t(\varepsilon,t_2) - U(\varepsilon,t_1)]d\varepsilon$$

يساوي دفع قوة الشد أي: $T_0\, Ux\Big|_{x=x2} - T_0\, Ux\Big|_{x=x2}$

لهذا فإن: $\int_{x1}^{x2} [U_t(\varepsilon,t_2) - U_t(\varepsilon,t_1)]\,\rho(\varepsilon)d(\varepsilon) =$

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0[Ux(x_2\ \tau`-Ux(x,\tau)]d\tau + \int_{x1}^{x2}\int_{t1}^{t2} F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau \quad (3)$$

حيث $F(\varepsilon,\tau)$ تابع كثافة القوى الخارجية الخطية (المفترض أن هذه الدالة مستمرة مع τ على طول الخيط l) وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية نفترض استمرار المشتقات الثانية للدالة $U\ (x,t)$ التي تأخذ العلاقة الأخيرة.

بعد تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى مرتين نحصل على الصورة التالية:

$$U_{tt}\left(\varepsilon^{**},t^{**}\right)\rho\left(\varepsilon^{**}\right)\Delta t\Delta x =$$
$$\{T_0[U_{xx}(\varepsilon^{**},t^{**}) + F(\varepsilon^{***},t^{***}]\}\Delta t\Delta x$$

حيث:

$$\varepsilon^{*},\varepsilon^{**},\varepsilon^{***} \in (x_1,x_2)$$
$$t^{*},\ t^{**},\ t^{***} \in (t_1,\ t_2)$$

وبعد الاختصار وأخذ النهايات نحصل على:

$$T_0 U_{xx} = \rho U_{tt} - F(x,t)$$

وعندما تكون ρ ثابتة نكتب:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t)$$

حيث إن : $f(x,t) = \frac{1}{\rho} F(x,t)$ $\quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$

وأن الدالة f هي كثافة القوة منسوبة لوحدة الكتل.

وعند انعدام القوى الخارجية نحصل على المعادلة من النمط الزائدي:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}$$

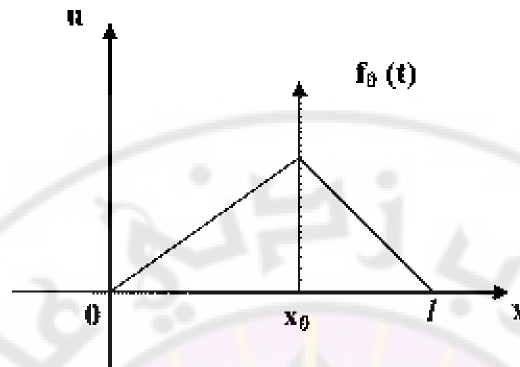
وهي معادلة اهتزاز وتر لا يتعرض لقوى خارجية .

ملاحظة(2):

فيما سبق افترضنا أن الدوال المستخدمة تقبل الاشتقاق مرتين ولكن هذا لا يعني عدم وجود دوال لا تقبل الاشتقاق مرتين وتحقق هذه المعادلات.

إذا أثرت قوة مركزية $f_0(t)$ في النقطة x_0 حيث $x_0 < x_1 < x_2$

كما في الشكل:



فإن المعادلة (3) تكتب

$$\int_{\alpha 1}^{x2} \rho(\varepsilon)\left[U_t(\varepsilon_1 t_2) - U_t(\varepsilon_1 t_1)\right]d\varepsilon - \int_{x1}^{x2}\int_{t1}^{t2} (\varepsilon_1 t)\, d\varepsilon\, d\tau =$$

$$\int_{t1}^{t} T_0\left[U_x(x_2,\tau) - U_{x1}(x,\tau)\right]d\tau + \int_{t1}^{t2} f_0(\tau)\,d\tau$$

وحيث إن سرعات نقط الوتر محدودة فإن التكاملين في الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة يؤولان إلى الصفر عندما:

$$x_2 \to x_0 \Rightarrow \ x_1 \to x_0$$

لهذا نجد: $\int_{t1}^{t2} T_0\left[Ux(x_0+0,\tau) - U_x(x_0-0,\tau)\right]d\tau$

$$= -\int_{t1}^{t2} f_0(\tau)\,d\tau$$

وحسب مبرهنة القيمة الوسطى والاختصار على Δt (الاختياري) والانتقال

إلى النهايات: $Ux(x,t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T_0} f_0(t)$

أي أن المشتقات الأولى تتقطع في نقطة تأثير القوة المركزية ولا يكون للمعادلة التفاضلية معنى وبالتالي يكون :

$$Ux(x_0+0,t) - Ux(x_0-0,t) = -\frac{1}{T_0} f_0(t)$$

وهذا يعبر عن مقدار الوتر في x_0 المعتمد على قوى الشد T_0 والقوة المركزية $f_0(t)$.

ب ـ معادلة الاهتزاز الطولية للقضبان والأوتار

إن المعادلات الواصفة للاهتزازات الطولية للأوتار والقضبان و النوابض لها صورة واحدة ، ولهذا سندرس اهتزاز قضيب طوله l $(0 < x < l)$ منطبق على محور الفواصل ox ويمكن وصف اهتزازه بالدالة $U(x,t)$ في اللحظة t وفي النقطة ذات الفاصلة x عندما نحصل على إزاحة في هذه النقطة فتحصل حالة اهتزاز طولي على طول القضيب تساوي $x+U(x,t)$ (حسب قانون هوك ومتغيرات لاغرانج تصبح الفاصلة x التي كان النقطة المقابلة لها في وضع اتزان).

لنحسب الاستطالة النسبية لعنصر القضيب ذي الطول Δx حيث إن بدايته $(x, U(x,t))$ ونهايته $(x+\Delta x, U(x+\Delta x, t))$.

إن مقدار هذه الاستطالة يساوي:

$$\frac{[\Delta x + U(x+\Delta x, t] - [\Delta x + U(x,t)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta U(x,t)}{\Delta x} = U_x(x+\theta\,\Delta x, t) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

وعندما $\Delta x \to 0$ نجد أن هذه الاستطالة النسبية تتحدد فقط بالدالة $U_x(x,t)$.

بفرض أن: $k(x)$ عامل المرونة (عامل يونغ) وبتطبيق نظرية تغير كمية الحركة نجد: $\int_{x1}^{x2} [U_t(\varepsilon, t_2) - U_t(\varepsilon, t_1)]\,\rho(\varepsilon)d\varepsilon =$

$$\int_{t1}^{t2} k(x_2)\,Ux(x_2,\tau) - k(x_1)U_x(x_1,\tau)]d\tau + \int_{x1}^{x2}\int_{t1}^{t2} F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau$$

حيث إن $F(x,t)$ دالة كثافة القوة الخارجية في واحدة الطول.

وعند الانتقال إلى النهايات أي: $\Delta t \to 0 \quad , \quad \Delta x \to 0$

وتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى نجد: $[K(x)Ux]_x = \rho U_{tt} - F(x,t)$

وعندما يكون القضيب متجانساً أي $\rho(x), \; k(x)$ ثوابت نجد:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + \frac{F(x,t)}{\rho}$$

حيث $a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ وهي معادلة تفاضلية جزئية مرتبة ثانية .

ج - معادلة اهتزاز خيط دون وجود قوى خارجية

هي حركة اهتزاز خيط مرن مثبت الطرفين طوله l يهتز في مستو شاقولي ويزاح عن وضع توازنه في لحظة البدء $t=0$ ويترك بعدها حراً سوف نفترض تحقيق الشروط الآتية:

1 . الخيط متجانس له كتلة واحدة في واحدة الطول.

2 . ثقل الخيط مهمل.

3 . الاهتزاز شاقولي فقط.

لنبحث عن القوى المؤثرة على حركة الخيط (على طول Δl من الخيط حيث $\overline{M_1M_2}=\Delta l$) ولنكن T_2, T_1 قوى الشد عند M_2, M_1 على الترتيب وبما أن حركة الخيط شاقولية فقط إذاً مسقطا قوى الشد على المحور ox متعاكسان مباشرة أي:

$$T_1(x)\,Cos\,\alpha \;\;,\;\; T_2(x)\,Cos\,\beta$$

يحققان: $$T_1(x)\,Cos\,\alpha = T_2(x)\,Cos\,\beta = T$$

(متساويان بالقيمة المطلقة).

أما المسقطان الشاقوليان فهما: $T_1\sin\alpha \;,\; T_2\sin\beta$

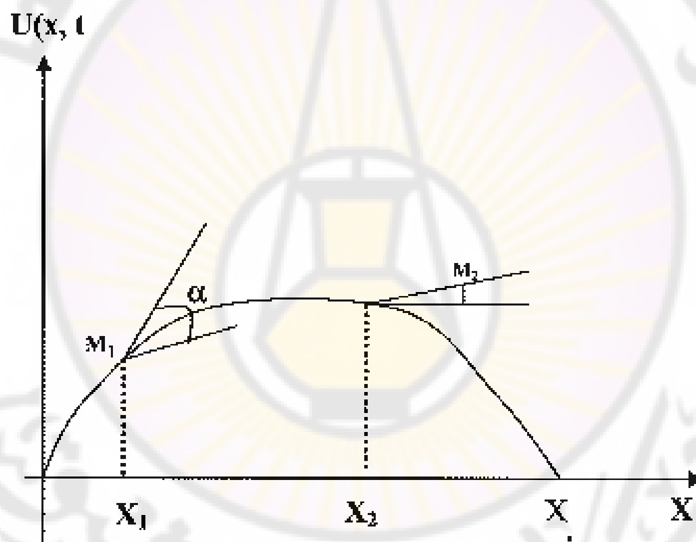
فلهما محصلة وهي: $T_2\,Sin\,\beta \;-\; T_1\,Sin\,\alpha$

ومحصلة القوى المؤثرة على Δl هي المحصلة السابقة وحسب قانون نيوتن بالتحريك فإن القوى تمثل بالمتجه $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$

حيث $\vec{\Gamma}$ التسارع و $\vec{F}$ القوة .

وبالإسقاط :
$$T_2 Sin\beta - T_1 Sin\alpha = \rho\,\Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

حيث ρ كتلة واحدة الطول و دالة الاهتزاز $U\,(x,t)$ نقسم على T.



$$\frac{T_2 Sin\beta}{T_2 Cos\beta} - \frac{T_1 Sin\alpha}{TCos\alpha} = \frac{\rho}{T}\Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

أي :
$$\overline{M_1 M_2} = \Delta l \approx \Delta x$$

$$tg\beta - tg\alpha = \rho \frac{\Delta x}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

ومن معادلة الخيط نجد : $tg\alpha = \dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}$

$$tg\beta = \frac{\partial U(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

وبتبديل العلاقتين الأخيرتين في المعادلة السابقة نجد:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial U(x+\Delta x,y) - \partial U(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

وبأخذ النهايات $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

أي

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

حيث $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ وهي المعادلة النمط الزائدي المطلوبة.

د . معادلة الاهتزازات الكهربائية في النواقل

ليكن التيار والكمون في موضع x ولحظة t وسطاء التيار في ناقل كهربائي ولنرمز لهما بالرمزين V, I على الترتيب.

لنطبق قانون أوم على جزء من ناقل طوله $d\,x$ يمكننا كتابة ما يلي:

$$-V_X\,dx = I\,R\,dx + I\,L\,dx$$

حيث R , L هما المقاومة والتحريض الذاتي في الناقل في واحدة الأطوال. وأما كمية الكهرباء المارة بالعنصر dx خلال تغير زمني dt

فهي: $[I(x,t)-I(x+\Delta x,t)]\,dt=-I_x\,dx\,dt$

وهي تساوي مجموع كمية الكهرباء اللازمة لشحن العنصر dx وأما الكمية المفقودة نتيجة عدم العزل التام فهي:

$$C[V(x,t+\Delta t)-V(x,t)]dx+G\,dx\,dt=[CV_t+GV]dx\,dt$$

حيث G,C معاملات السعة والتسرب الكهربائي في واحدة الأطوال علماً بأن: الكمية المفقودة متناسبة مع الكمون.

من المعادلات الثلاث الأخيرة نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} I_x+CV_t+GV=0\\ V_x+LI_t+RI=0\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

والمعادلات الأخيرة تدعى معادلتي البرق ومنها يمكننا الحصول على معادلة واحدة تحدد الدالة I لنفاضل المعادلة الأولى من (4) بالنسبة للمتحول x والثانية بالنسبة للزمن t بعد ضربها بالمتحول x وبالطرح

ينتج : $I_{xx}-GV_x-CL\,I_{tt}-CR\,I_t=0$

(مع ثبات المعاملات) نعوض في المعادلة الثانية من (4) عن V_x فنحصل على:

$$I_{xx}=CL\,I_{tt}+(CR+GL)I$$

وبصورة مماثلة نحصل على معادلة الكمون:

$$V_{xx} = CLV_{tt} + (CR+GL)V_t + GRV$$

وهما معادلتا البرق للتيار I والكمون V وبإهمال G, R نتوصل إلى:

$$V_{tt} = a^2 V_{xx} \qquad a = \sqrt{\frac{1}{Lc}}$$

و هي معادلة تفاضلية جزئية من النمط الزائدي .

الشروط الحدية والشروط الابتدائية

يلزمنا وضع شروط كافية لتحديد حل وحيد للمسألة الفيزيائية المطروحة وحسب معرفتنا فإن للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية حلول لا نهائية من حيث العدد ولهذا يلزم وضع شروط إضافية لأجل وحدانية الحل وفي المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الثانية يمكننا إيجاد الحل بشكل وحيد إذا علمنا قيمة الدالة ومشتقها في لحظة البدء $t=0$ وتسمى مثل هذه المسائل بمسألة كوشي ويمكننا أن نصادف شروطاً أخرى فمثلاً في مسألة السليسلة تعطى قيمة الدالة الحل في نقطتين ويمكن للمعادلة التفاضلية الجزئية أن تعطى شروط إضافية مختلفة الصورة عما سبق.

لندرس مسألة بسيطة وهي مسألة اهتزاز وتر مثبت الطرفين. تكن $U(x,t)$ الدالة المعبرة عن الاهتزاز في وتر منطبق على المحور ox طول $(0 \le x \le l)$ مثبت الطرفين أي:

$$U(0,t)=U(l,t)=0 \quad (5)$$

وحيث إن عملية الاهتزاز تعتمد على صورة الوتر الابتدائية (شكله في لحظة البدء) وتوزيع السرعة من تلك اللحظة $t=0$ لهذا يلزم معرفة:

$$\left.\begin{aligned} U(x,t_0) &= \varphi(x) \\ U_t(x,t_0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

حيث $\psi(x)$, $\varphi(x)$ دالتان معروفتان.

إن الشروط المذكورة بالعلاقات (5),(6) تحددان تماماً حل معادلة الاهتزاز ذات النمط الزائدي: $U_{tt}=a^2\,U_{xx}$

أما إذا كان طرفا الوتر يتحركان وفق قانونا حركة ما فإن الشروط الحدية تأخذ الشكل:

$$\left.\begin{aligned} U(0,t) &= \mu_1(t) \\ U(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

حيث $\mu_2(t)$, $\mu_1(t)$ دالتان معلومتان وتصاغ شروط ابتدائية وحدية بشكل مشابه لمسائل أخرى.

ملاحظة(3): إذا كان ما يهمنا هو دراسة الظاهرة خلال فترة زمنية صغيرة (بفرض أن تأثير الحدود غير جوهري) فإنه بدلاً من دراسة المسألة الكاملة ندرس المسألة اللانهائية بالشروط الابتدائية لمنطقة اللانهاية.

فإذا كان المطلوب حل المعادلة: $U_{tt}=a^2\,U_{xx}+F(x,t) \quad (8)$

حيث $t > 0 \ , \quad -\infty < x < \infty$

فإن الشروط الابتدائية تصبح:

$$\left.\begin{aligned} U(x,0) &= \varphi(x) \\ U_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad -\infty < x < \infty$$

وتدعى المسألة عندها مسألة كوشي

وإذا كنا ندرس المسألة قرب أحد الحدود بحيث لا يكون هناك تأثير للنظام الحدي على الحدود الأخرى خلال فترة زمنية (الفترة التي تهمنا) فإننا نصل إلى صياغة مسألة وتر منطبق على المحور ox مثبت أحد الطرفين والطرف الآخر يمتد إلى ∞ أي أن الشروط الابتدائية تصبح:

$$\left.\begin{aligned} U(x,0) &= \varphi(x) \qquad t \geq 0 \\ U_t(x,0) &= \psi(x) \qquad 0 < x < \infty \end{aligned}\right\}$$

وعند ذلك يتحدد طابع الظاهرة باللحظات الزمنية البعيدة [بشكل كاف عن لحظة البدء] تحديداً تاماً بالشروط الحدية لأن تأثير الشروط الابتدائية يضعف مع مرور الزمن بفضل الاحتكاك.

تصادفنا هذه المسائل بكثرة خاصة عند وجود نظام حدي دوري يؤثر على وتر زمناً طويلاً وتصاغ مثل هذه المسائل (دون شروط ابتدائية) كما يلي: ليكن المطلوب تعيين حل للمعادلة المدروسة(8) وفق الشروط الحدية (7) التالية :

$$\left.\begin{array}{l} U(0,t)=\mu_1(t) \\ U(l,t)=\mu_2(t) \end{array}\right\},$$

حيث $t > -\infty$; $0 \le x \le l$ بنفس الطريقة تصاغ المسألة دون شروط ابتدائية لمستقيم نصف محدود.

المسألة العامة

إذا أردنا حل مسألة معقدة فمن الطبيعي أن نفكر في تحويل هذا الحل إلى حل مسألة أو مسائل أكثر سهولة ولهذا فإننا سوف نعبر عن حل المسألة الحدية العامة في صورة مجموع حلول لعدة مسائل حدية خاصة ولهذا لنفرض أن المعادلة:

$$\frac{\partial^2 Ui}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 Ui}{\partial x^2}+f^i(x,t) \quad (9)$$

حيث: $i = 1,2,...n$, $t > 0,$ $0 \le x < l$

تحقق الشروط الإضافية التالية:

$$Ui(0,t)=\mu_1^i(t), \quad U_i(l,t)=\mu_2^i(t)$$

$$\frac{\partial Ui}{\partial t}(x,0)=\psi^i(x) \quad ; \quad Ui(x,0)=\varphi^i(x)$$

من الواضح أن الدالة: $U^0(x,t)=\sum_{i=1}^{n}Ui(x,t)+f^0(x,t)$

تحقق المعادلة (9) بافتراض تحقق الشروط الإضافية التي أطرافها اليمنى هي الدوال:

$$\mu_k^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i(t) \qquad k = 1,2$$

$$\varphi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(x)$$

$$\psi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi^i(x)$$

أي أن حل المسألة الحدية العامة:

$$U_{tt} = a^2\, U_{xx} + f(x,t) \quad 0 < x < l \;\; ; \; t > 0$$

وضمن الشروط :

$$\left.\begin{array}{l} U(0,t) = \mu_1(t) \\ U(l,t) = \mu_2(t) \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{array}\right\}$$

يمكن أن يعبر عنه في صورة المجموع.

$$U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t) + U_3(x, t) + U_4(x, t)$$

حيث U_1, U_2, U_3, U_4 حلول المسائل الحدية التالية:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} \qquad i = 1,2,3$$

$$\frac{\partial^2 U_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + f(x,t)$$

وفق الشروط التالية :

$U_1(0, t) = 0 , U_1(l, t) = 0 , U_1(x,0) = \varphi(x)$

$$\frac{\partial U_1(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$$

$$U_2(0, t) = \mu_1(t) , U_2(l, t) = 0 , U_2(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$U_3(0, t) = 0 , U_3(l, t) = 0 , U_3(x,0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$U_4(0, t) = 0 , U_4(l, t) = 0 , U_4(x,0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial t}(x,0) = 0$$

ملاحظة(4)

يمكن تعميم ذلك على دالة بأكثر من متحولين طريقة الأمواج المنتشرة (علامة دلامبير). سوف نبدأ بدراسة طرق تشكيل حلول المسائل الحدية لمعادلات النمط الزائدي لوتر لانهائي وذي الشروط الابتدائية التالية:

$$\left.\begin{aligned} U_{tt} - a^2 U_{xx} &= 0 \\ U(x,0) &= \varphi(x) \\ U_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

لنحول المعادلة (10) (الأولى) إلى الشكل القياسي وفق المعادلة المميزة فنجد:

$$d x^2 - a^2 d t^2 = 0$$
$$\Rightarrow (d x - a\ d t)(d x + a\ d t)$$
$$\Rightarrow (d x - a\ d t) = 0 \quad , \quad (d x + a\ d t) = 0$$

أي:

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad x = a t + c_1$$
$$\frac{dx}{dt} = -a \quad \Rightarrow \quad x = -a t + c_2$$

فإذا افترضنا متحولين جديدين.

$$\varepsilon = x + at \ \eta = x - at$$

تتحول المعادلة (10) إلى الشكل $U_{\varepsilon\eta} = 0$

لنكامل بالنسبة للمتحول ε فنجد:

$$U_\eta = f^*(\eta)\ U_\eta(\varepsilon,\eta)$$

نكامل بالنسبة للمتحول η فنجد:

$$U(\varepsilon,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f_1(\varepsilon)$$
$$U(\varepsilon,\eta) = f_2(\eta) + f_1(\varepsilon) \quad (11)$$

حيث $f_2(\eta), f_1(\varepsilon)$ دوال للوسيطين η, ε على الترتيب.

وكل منهما يقبل التفاضل مرتين وبالعكس إذا تحقق الشرط فإن $U(\varepsilon,\eta)$ المحددة بالعلاقة (11) تكون حل للمعادلة $U_{\varepsilon\eta} = 0$.

إذا عدنا إلى المتحولات القديمة:

فإن الدالة : $U(x,f)=f_2(x-at)+f_1(x+at)$

تعد حلاً للمعادلة التفاضلية: $U_{tt}=a^2 U_{xx}$

لنعين $f_2(\eta), f_1(\varepsilon)$ بدلالة $\varphi(x)\ \psi(x)$, نجد حسب الشروط:

$$\begin{cases} U(x,0)=f_2(x)+f_1(x)=\varphi(x) \\ U_t(x,0)=a f_1(x)-a f_2(x)=\psi(x) \end{cases} \quad (12)$$

وحسب تكامل العلاقة (12) نجد:

$$f_2(x)+f_1(x)=\varphi(x)$$

$$f_2(x)-f_1(x)=\frac{1}{a}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha+c$$

حيث x_0 , c ثوابت وبجمع المساواتين السابقتين ثم طرحهما نجد:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)dx+\frac{c}{2} \\ f_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{2}{2a}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)dx+\frac{c}{2} \end{aligned}\right\}. \quad (13)$$

وبذلك نكون قد حددنا الدالتين $f_2(x), f_1(x)$ بدلالة الدالتين ψ $\varphi,$ علماً بأن (13) يجب أن تتحقق من أجل أي قيمة لمتحول مستقل لهذا نعوض في $U\ (x,t)$ عن $f_2(x), f_1(x)$ فنجد:

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{x0}^{x+at}\psi(\alpha)d(\alpha)-\int_{x0}^{x-at}\psi(\alpha)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+a)+\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha \quad (14)\right]$$

وهي علاقة دلامبير.

ملاحظة(5):

مما سبق وجدنا حل للمعادلة (المسألة المطروحة) وهذا يثبت وحدانية الحل.

المعنى الفيزيائي:

إن الدالة $U(x,t)$ المعرفة كما يلي:

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha\right]$$

وهي علاقة تعبر عن عملية انتشار موجه الانزياح الابتدائي والسرعة الابتدائية وعندما نكون لحظة البدء $t = t_0$ فإن $U\ (x,t_0)$ تعطي المقطع الجانبي للوتر في تلك اللحظة وعند تثبت $x = x_0$ نحصل على الدالة $U\ (x,t)$ التي تعبر عن الحركة في النقطة x_0.

نلاحظ أن تراكب الموجتين: $f_1(x+at)+f_2(x-at)$

يمثل حل معادلة كوشي للوتر اللانهائي إحدى هاتين الموجتين تتجه يميناً $f_2(x-at)$ والأخرى يساراً $f_1(x+at)$ وبهذا نحصل:

$$f_1(x+at)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]$$

$$f_2(x-at)=\frac{1}{2}\left[\psi(x+at)+\psi(x-at)\right]$$

حيث : $$\psi(x)=\frac{1}{2\alpha}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha$$

دراسة بعض الحالات الخاصة

1 . السرعة الابتدائية معدومة والانزياح الابتدائي معلوم $\varphi(x)$ عندها يكون الحل: $U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]$

2 . الانزياح الابتدائي معدوم والسرعة الابتدائية معلومة عندها يكون الحل : $u(x,t)=\frac{1}{2a}\left[\psi(x+at)-\psi(x-at)\right]$

3 . السرعة الابتدائية غير معدومة وكذلك الانزياح الابتدائي عندها يكون الحل:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\left[\psi(x+at)-\psi(x-at)\right]\right]$$

طريقة فصل المتحولات (طريقة فوريه)

إن طريقة فصل المتحولات أو طريقة فوريه من أكثر الطرق شيوعاً في حل المعادلات التفاضلية الجزئية وسوف نشرحها من أجل دراسة اهتزاز خيط مثبت من الطرفين.

ليكن المطلوب حل المعادلة التفاضلية الجزئية.

$$U_{tt} = a^2 \, U_{xx}$$

والمحقق للشروط الحدية : $U(x,t) = X(x).T(t)$

وحيث إننا افترضنا أن كلاً من الدالتين X, T تتبعان متحولاً وحيداً هو x، t على الترتيب، نشتق الدالة $U(x,t)$ مرتين و نعوض في المعادلة التفاضلية المفروضة فنجد:

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T}$$

وبما أن كلا الطرفين يتبع متحولاً مستقلاً و هما متساويان لهذا يكون كل منهما ثابتاً أي: $\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \quad , \quad \lambda > 0 \quad (15)$

(سنرى لاحقاً أنه من أجل $\lambda \leq 0$ نحصل على الحل التافه)

من العلاقة (15) نجد:

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

وكما نعلم من الشروط الحدية:

$$U(0,1) = X(0).T(t) = 0$$
$$U(l,t) = X(l).T(t) = 0$$

أي: $X(0) = .X(l) = 0$

لأن $T(t) \neq 0$ (عند الحالة المعاكسة نحصل على الحل التافه).

ونتيجة تعيين $X(x)$ نصل لمسألة بسيطة وهي حساب القيم الذاتية أو بشكل آخر المطلوب تعيين الوسيط λ من أجل إيجاد حل غير تافه للمسألة:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad , \quad X(0) = X(l) = 0$$

تسمى قيم λ المعنية لهذه الحلول بالقيم الذاتية والدوال المقابلة لها دوال ذاتية (مثل هذه المسألة تسمى مسألة شتورم ـ ليوفييل).

الحالات المختلفة لقيم λ:

1 ـ بفرض $\lambda < 0$ عندها يكون الحل العام للمعادلة: $X'' + \lambda X = 0$

من الشكل : $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

وحسب الشروط الحدية: $X(0) = C_1 + C_0 = 0 \quad ; \quad C_1 = - C_2$

$$X(l) = C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0 \quad ; \quad \alpha = l\sqrt{-\lambda}$$

ومنه $C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

أي أننا حصلنا على الحل التافه وهو: $U(x,t) = 0.T(t) = 0$

2. من أجل $\lambda = 0$ في هذه الحالة يكون حل المعادلة:

$$X'' + \lambda X(x) = 0 \quad ; \quad \lambda = 0$$

من الشكل $X(x) = C_1 x + C_2$

ومن الشروط الحدية:

$$X(0) = C_2 = 0 \quad ; \quad X(l) = C_1 l = 0$$

أي $C_1 = 0$ ومنه $X(x) = 0$

وبالتالي نحصل على الحل التافه وهو: $U(x,t) = 0$.

3. من أجل $\lambda > 0$ نجد: $X'' + \lambda X(x) = 0$

ويكون الحل من الشكل: $X(x) = D_1 Cos\sqrt{\lambda}\ x + D_2 Sin\sqrt{\lambda}\ x$

ومن الشروط الحدية نجد: $X(0) = D_1 = 0$

$$X(l) = D_2 Sin\sqrt{\lambda}\ l = 0$$

ومنه $Sin\sqrt{\lambda}\ l = 0 = Sin\, n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$

أي: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

حيث n عدد صحيح أي هناك حلول غير تافهة وفق قيم λn وهذه القيم يقابلها دوال X_n حيث

$$X_n = D_n . Sin \frac{n\pi}{l} x$$

حيث D_n ثابت اختياري.

ليكن $I = D_n$ عند ذلك نحل على حلول للمعادلة:

$$T`` + a^2 \lambda T = 0$$

من الشكل $T_n = A_n Cos \frac{n\pi}{l} at + B_n Sin \frac{2\pi}{l} at$

أي الحل المطلوب هو: $U(x,t) = \sum_{i=1}^{n} U_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} T_i . X_i$

أي أن :

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \left[A_n Cos\left(\frac{n\pi}{l} at\right) + B_n Sin\left(\frac{n\pi}{l} at\right)\right] \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (16)$$

هو الحل العام .

وحسب الشروط المفروضة: $U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} Un(x,0)$

$$U(x,0) = \sum_{1}^{\infty} A_n Sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x)$$

أي نشرنا الدالة$\varphi\ (x)$ وفق سلسلة جيوب لهذا يمكن تعيين الثابت A_n كما يلي:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) Sin\frac{n\pi}{l} x dx$$

من الشرط الثاني نجد: $U_t(x,0) = \psi(x) = \sum_1^\infty \frac{\partial Un}{\partial t}(x,0)$

$$\psi(x) = \sum_1^\infty \frac{\pi n}{l} aB_n Sin\frac{n\pi}{l} x$$

أي أن $\psi(x)$ أيضاً ينشر وفق سلسلة جيوب لهذا يمكن تعيين الثابت

كما يلي: $\frac{n\pi}{l} aB_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) Sin\frac{n\pi}{l} x dx$

أو $B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x) Sin\frac{n\pi}{l} x dx$

أي أننا عينا كل الثوابت $(B_n \ , \ A_n)$ والحل أصبح جاهزاً وفق سلسلة لانهائية (16). فإذا كانت السلسلة (16) متقاربة وجد الحل وإلا لا يوجد حلول وهذا طبعاً يعتمد على شروط نشر فورييه للدالتين $\psi(x), \varphi(x)$.

ملاحظة(7):

يمكننا مناقشة طريقة حل معادلة تفاضلية جزئية غير متجانسة ومن المرتبة الثانية كما يلي: $U_{tt}=a^2\ U_{xx}+f_0(x)$

ولتكن الشروط الابتدائية والحدية من الشكل:

$$U(x,0)=\varphi(x)\ \ ;\ \ U_t(x,o)=\psi(x)$$

$$U(0,t)=U_1=cte$$

$$U(l,t)=U_2=cte$$

ويكون الحل كما يلي : $U(x,t)=\overline{U}(x)+v(x,t)$

حيث $\overline{U}(x)$ يمثل حالة الاستقرار للوتر المعروفة وفق المعادلة (الشروط). $a^2U_{xx}(x)+f_0(x)=0$

أما الدالة $v\ \ (x,t)$ فتمثل حالة الانزياح عن الحالة المستقرة وهي تحقق المعادلة المتجانسة. $U_{tt}=a^2\ U_{xx}$

بالشروط $v\ (0,\ t)=0\ \ ;\ \ \ \ v(l\ ,\ t)=0$

$$v\,(x,0)=\overline{\varphi}(x)\qquad ;\qquad \overline{\varphi}\,(x)=\varphi\,(x)-\overline{U}\,(x)$$

$$\varphi_t\,(x,0)=\psi\,(x)$$

(أي الدالة $v(x,t)$ هي الحل السابق).

يمكننا أيضاً مناقشة المسألة ذاتها إذا لم يكن هناك شروط ابتدائية.

الفصل العاشر

المعادلات ذات النمط المكافئي

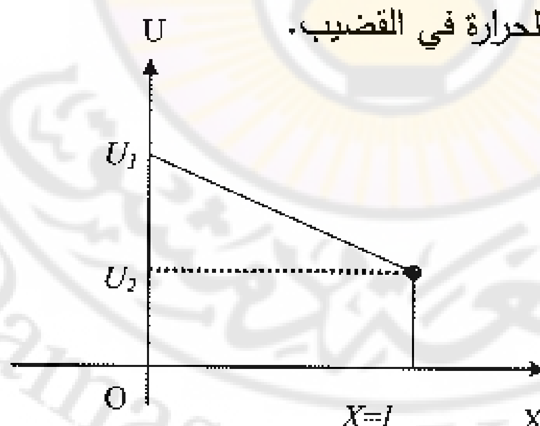
عند دراسة عمليات الإيصال الحراري والانتشار الحراري تصادفنا معادلات تسمى معادلات النمط المكافئي وأبسط أشكالها هو الشكل:

$$U_y = U_{xx} \quad , \qquad y = a^2 t$$

مسائل تؤدي إلى معادلات ذات نمط مكافئي:

أ. مسألة انتشار الحرارة بشكل خطي

لندرس حالة قضيب متجانس طوله l معزول حرارياً من جوانبه ورقيقاً بشكل كاف لتكون الحرارة واحدة في أي مقطع عرضي للقضيب. والشكل التالي يوضح انتشار الحرارة في القضيب.



فإذا كانت U_1 ,U_2 درجتي الحرارة عند طرفي القضيب فإن دستور انتشارها الخطي هو: $U(x)=U_1+\frac{U_2-U_1}{l}x$

إن الحرارة تجري من الطرف الأكثر (سخونة) حرارة إلى الطرف الأقل سخونة وكمية الحرارة السارية خلال مقطع مساحته S في واحدة الزمن تعطى وفق القانون التجريبي التالي: $Q=-k\frac{u_2-u_1}{l}S=-k\frac{\partial u}{\partial x}S$

حيث k عامل التوصيل الحراري الذي يعتمد على مادة القضيب ولقد اصطلح على اعتبار التدفق الحراري موجباً إذا كانت الحرارة تنتقل باتجاه تزايد x.

إن عملية انتشار الحرارة في قضيب توصف بواسطة دالة $U(x,t)$ التي تعبر عن درجة الحرارة في النقطة x وفي اللحظة t.

لنبحث عن المعادلة المناسبة لهذه العملية وقبل ذلك لنحدد القوانين الفيزيائية المحددة لعملية الانتشار هذه.

1 . قانون فوريه:

في حالة كون الحرارة على القضيب غير متجانسة فإن انتشار المواضع ذات الدرجة الأدنى وتكون كمية الحرارة السارية في المقطع ذي الفاصلة x وخلال الزمن dt هي المساواة : $dQ=q\,S\,dt$

حيث $q=-k(x)\frac{\partial u}{\partial x}$

كثافة التدفق الحراري وهذه الكثافة تساوي كمية الحرارة السارية في وحدة الزمن خلال مساحة قدرها $1\ cm^2$ ويمكن فهم هذه الكمية وفق العلاقة:

$$Q=\int_{t1}^{t2}dq=-S\int_{t1}^{t2}k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt \quad (17)$$

وعندما يكون القضيب غير متجانس فإن المعامل k يكون تابعاً لـ x أي شكله $k(x)$.

2 . معلوم في علم الحرارة أن كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة جسم ما متجانس بمقدار Δu هي

$$Q = C.\ m\ .\ \Delta u = s\ \rho\ V\ \Delta\ u)$$

حيث C تمثل السعة الحرارية النوعية و m كتلة الجسم و ρ كثافته و V حجمه.

ويمكننا الحصول على علاقة تكاملية لكمية الحرارة Q لكتلة محددة بالنقطتين x_2, x_1 كما يلي: $Q=\int_{x1}^{x2}C\rho V\Delta u(x)\,dx \quad (18)$

3 . من المعلوم أنه يحدث امتصاص لانتشار الحرارة داخل القضيب (مثل حالة مرور تيار كهربائي أو نتيجة تفاعلات كيميائية..الخ)، لنفرض أن $F(x,t)$ هي الدالة الممثلة لكثافة الحرارة المنبعثة من النقطة x

في اللحظة t وخلال فترة dt تنبعث حرارة من القطعة ذات الطول dx تساوي:

$$dQ = S\,F(x, t)\,dx\,dt$$

$$\Rightarrow Q = S\int_{t1}^{t2}\int_{x1}^{x2} F(x,t)dxdt \quad (19)$$

حيث Q هي الحرارة المنبعثة من الجزء (x_1, x_2) خلال الفترة (t_1, t_2).

فإذا استعنا بالعلاقات (17),(18),(19) وقانون حفظ الطاقة يمكننا كتابة:

$$\int_{t1}^{t2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x1}\right] d\tau$$

$$+\int_{x1}^{x2}\int_{t1}^{t2} F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau = \int_{x1}^{x2} c\rho[u(\varepsilon,t_2)-u(\varepsilon,t_1)]\,d\varepsilon$$

وهي الصورة التكاملية لمعادلة التوصيل الحراري وللحصول على الصورة التفاضلية نفترض أن $U(x,t)$ تقبل التفاضل مرتين بالنسبة للمتحول x ومرة واحدة بالنسبة للمتحول t (بعملية التفاضل قد نخسر بعض الحلول ولكن في حالتنا هذه هذا غير موجود) فنجد:

$$\left[\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x1}\right]\right]\Delta t +$$

$$F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t = \{c\rho[u(\varepsilon,t_2)-U(\varepsilon,t_1)]_{\varepsilon=x3}\quad \Delta x$$

وباستخدام نظرية التزايدات المحدودة نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{\substack{x=x5\\t=t2}}\Delta t\Delta x+F(x_n,t_n)\Delta x\Delta t=$$

$$=\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{\substack{x=x3\\t=t3}}\Delta x.\Delta t$$

حيث $t_3, t_4, t_5, x_3, x_4, x_5$ نقط وسطية في الفترة (x_1, x_2) ، (t_1, t_2) على الترتيب. و بعد الاختصار على $\Delta x, \Delta t$ نجد ما يلي :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x5\\t=t5}}+F(x,t)\Big|_{\substack{x=x4\\t=t4}}=C\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|_{\substack{t=t3\\x=x3}}$$

وبالانتقال إلى الزيادات نجد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)=C\rho\frac{\partial u}{\partial t}\quad(20)$$

حالات خاصة

1 . القضيب متجانس عندها تكون k , C, ρ ثوابت وتأخذ المعادلة (20) الشكل :

$$U_t=a^2\ U_{xx}+f(x,t)$$

حيث $a^2=\frac{k}{C.\rho}$, $f(x,t)=\frac{F(x,t)}{C.\rho}$

يسمى a^2 معامل التوصيل الحراري وإذا انعدمت مصادر الحرارة $(F(x,t)=0)$ عندها نحصل على المعادلة:

$$U_t = a^2\ U_{xx}$$

2 . إذا اعتمدت مصادر الحرارة فقط على درجة الحرارة عندها يخضع التبادل الحراري لقانون نيوتن (التبادل مع الوسط المحيط) وتكون كمية الحرارة التي يفقدها القضيب في وحدة الأطوال وواحدة الزمن من الشكل: $F_0 = h\ (u - \theta)$ حيث $\theta\ (x,\ t)$ درجة حرارة الوسط المحيط و h معامل التبادل الحراري وبذلك تكون كثافة مصادر الحرارة هي:

$$F = F_1(x,\ t) - h(u - \theta)$$

حيث $F_1(x,t)$ هي كثافة مصادر الحرارة الأخرى وإذا كان القضيب متجانساً فإن معادلة التوصيل الحراري مع التبادل الحراري الجانبي تأخذ الصورة:

$$U_t = a^2\ U_{xx} - \alpha U + f(x,t)$$

حيث $\alpha = \dfrac{h}{C\rho}$ و $f(x,t)$ دالة معلومة.

3 . وأخيراً إذا درست حالة التوصيل الحراري خلال فترة زمنية كبيرة فإن هذه المعادلة تصبح معادلة شبه خطية.

ب ـ معادلة انتشار الغازات

في حالتنا هذه عندما يكون الوسط (الوسط الغازي) غير متجانس التركيز فإن الانتشار يتم من المنطقة ذات التركيز الأعلى إلى المنطقة ذات التركيز الأدنى (و الشيئ نفسه يمكن أن يحدث في المحاليل غير متجانسة التركيز).

لنكن لدينا أنبوبة مجوفة أو مملوءة بمادة مسامية مع افتراض تركيز للغاز في مقطع الأنبوبة في أي لحظة هو تركيز واحد. عندئذٍ فإن عملية الانتشار يمكن وضعها بالدالة $U(x,t)$ التي تعبر عن التركيز في المقطع x في اللحظة الزمنية t (هذا التركيز يتبع x).

وحسب قانون نرنست تكون كثافة الغاز المتسرب خلال المقطع x وفي الفترة Δt محققة للمساواة :

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)S.dt = W\,S\,dt$$

حيث
$$W = -D\frac{\partial u}{\partial x}$$

و أن D معامل الانتشار و S سطح (مسامه) المقطع $W(x,t)$ كثافة التدفق الانتشاري وهي تساوي كتلة الغاز المتسربة في وحدة الزمن خلال وحدة المساحة ووفقاً لتعريف التركيز فإن كمية الغاز في الحجم V تكون

محققة للمساواة : $Q = U \,.\, V$

من هنا يمكننا أن نحصل على تغيير كتلة الغاز في منطقة الأنبوب المحددة بـ(x_1, x_2) عندما يتغير التركيز بـΔu كما يلي:

$$\Delta Q = \int_{x1}^{x2} C(x).\Delta U.S.dx$$

حيث $C(x)$ معامل المسامية، وتكون معادلة توازن كتلة الغاز من تلك المنطقة خلال الفترة (t_1, t_2) هي:

$$S\int_{t1}^{t2}\left[D(x_2)\frac{\partial u}{\partial t}(x_2,\tau) - D(x_1)\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\tau)\right] d\tau =$$

$$= S\int_{x_1}^{x2} C(\varepsilon)\left[u(\varepsilon,t_2) - U(\varepsilon,t_1)\right] d\varepsilon$$

وبمناقشة مشابهة لما سبق في الفقرة السابقة نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x0}\right) = C\frac{\partial u}{\partial t}$$

وهي معادلة انتشار الغازات وهي كما نرى مشابهة لمعادلة التوصيل الحراري (بانعدام مصادر المادة وانعدام الانتشار عند جدار الأنبوبة).

ج. انتشار الحرارة في الفراغ

يمكننا اعتبار الدالة $U(x,y,z,t)$ دالة معبرة عن درجة الحرارة في نقطة $M(x,y,z)$ في الفراغ في اللحظة t وتكون هذه الدالة إشارة مميزة لانتشار الحرارة في الفراغ فإذا كان الوسط غير متجانس حرارياً نشأ تدفق حراري من المناطق الأعلى درجة إلى المناطق الأخفض درجة.

لنفترض $d\sigma$ سطح صغير يحيط بنقطة ما $M(\xi, \eta, \zeta)$ من الفراغ وليكن $\hat{n}$ شعاع الناظم على هذا السطح إن كمية الحرارة التي تخترق السطح $d\sigma$ خلال واحدة الزمن يعبر عنها وفق قانون فورييه

بما يلي :

$$W_n d\sigma = (W.n)d\sigma = -k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

بشكل آخر يمكن أن نعبر عن هذه الكمية بقانون فورييه

$$\vec{W} = -k\,\overrightarrow{grad\,u}$$

حيث W هي كمية شعاعية تمثل التدفق كثافة التدفق الحراري وسوف نعتمد في دراستنا على كون الوسط متشابه وأن k كمية سلمية.

ليكن V حجماً محدداً بالسطح S إن معادلة التوازن الحراري للحجم V خلال الفترة $\Delta t = t_2 - t_1$ تكتب على الصورة:

$$\iiint_V C\rho[U(M,t_2) - U(M,t_1)dV_M =$$

$$= \int_{t1}^{t2} dt \iint_S Wn d\sigma + \int_{t1}^{t2} dt \iiint_V F(M,t) dv_M) \quad (21)$$

هذه الصورة تعبر عن قانون حفظ الحرارة في الحجم V خلال الفترة Δt والذي يقول أن كمية الحرارة في الحجم V خلال Δt تنتج بسبب تدفق الحرارة خلال السطح S (الحد الأول من الطرف الأيمن) وكذلك من كمية الحرارة المنبعثة من الحجم V خلال الفترة Δt نتيجة مصادر الحرارة حيث $M(\xi,\eta,\varepsilon)$ نقطة $dV_M = d\xi\, d\eta\, d\varepsilon$ و $C\rho$ السعة الحرارية لوحدة الحجم و W_n التدفق الحراري الناظمي. للانتقال من (21) إلى المعادلة التفاضلية نفترض $U(M,t)$ دالة تقبل التفاضل مرتين بالنسبة لـM ومرة واحدة بالنسبة للمتحول t وأن هذه المشتقات مستمرة وحسب علاقة غوص أو ستراغرادسكي :

$$\iint_S W_n d\sigma = \iiint_V divW\, dv$$

فإن العلاقة (21) تصبح.

$$\iiint_V c\rho[U(M,t_2) - U(\rho,t_1)]dV_M =$$

$$= \int_{t1}^{t2} dt \left(\iiint div\, W\, dV_M \right) + \int_{t1}^{t2} \iiint_V F(M,t) dv_M dt$$

وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى ونظرية التزايدات المحدودة للدوال ذات المتحولات الكثيرة نحصل على:

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t3 \\ M=M1}} \Delta t.V = \left[-divW \Big|_{t=t4} + F \Big|_{t=t5} \right] \Delta t.V$$

حيث t_2, t_3, t_4 نقط وسطية من Δt و M_1, M_2, M_3 نقط من الحجم V نثبت $M(x,y,z)$ داخل مركز الحجم V ونجعل $\Delta t \to 0$ ونختصر على $V.\ \Delta t$

فنجد: $$C\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = -div\,W(x,y,z,t) + F(x,y,z,t)$$

نعوض عن $W = -k\,\overrightarrow{grad\,u}$ فنجد $C\rho\,U_t = div(k\,\overrightarrow{grad\,u}) + F$

أو $$U_t = a^2(\nabla^2 U) + \frac{F}{C\rho} \qquad (22)$$

حيث $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ وهي معادلة انتشار الحرارة المطلوبة.

ملاحظة(8): من المفيد ملاحظة أن المعادلة (22) يمكن أن نطبق عليها شروط حدية وابتدائية مختلفة.

طريقة فصل المتحولات والمعادلات ذات النمط المكافئي

لتكن المعادلة ذات النمط المكافئي: (23) $U_t = a^2\ U_{xx} + f(x,t)$

حيث $0 < x < l \quad ; \quad t > 0$

والشروط الابتدائية والحدية التالية: $U(x,0) = \varphi(x) \quad ; \quad (0 \le x \le l)$

$$U(0,t) = \mu_1(t) \quad ; \quad U(l,t) = \mu_2(t) \qquad t > 0$$

لنبدأ بحل المسألة البسيطة (عند كون المعادلة متجانسة).

$$U_t = a^2\ U_{xx} \quad , \quad 0 < t < T \quad 0 < x < l \quad (24)$$

$$U(0,t) = U(l,\ t) = 0$$

لنفرض شكل الحل : $U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

نعوض في (24) فنجد: $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

حيث λ ثابت وبذلك نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (25)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0 \qquad (26)$$

ومن الشروط الحدية نجد: $X(0) = X(l) = 0$

وكما مر معنا سابقاً فإن حل المعادلة (25) يكون من الشكل:

$$X_n(x) = Sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث $\left(\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)$ ويقابل هذا الحل حل للمعادلة (26) هو:

$$T_n(t) = C_n \; e^{a^2 \lambda n t} Sin\frac{n\pi}{l}x$$

ومنه يكون حل المعادلة (26) : $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda n t} Sin\frac{n\pi}{l}x \quad (27)$

ومن أجل $t = 0$ نجد: $U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Sin\frac{n\pi}{l}x$

وحسب نظرية نشر فورييه نجد أن: $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) . Sin\frac{n\pi}{l}x dx$

إن المعادلة (27) هي حل للمعادلة ذات النمط المكافئي (23) .

الفصل الحادي عشر

المعادلات ذات النمط الناقصي

عند البحث عن عمليات مستقرة نلاحظ أنه مهما اختلفت الطبيعة الفيزيائية لهذه العمليات (اهتزازات، توصيل حراري، انتشار غازات) فإننا نصل بالنتيجة إلى معادلات ذات نمط ناقصي وأكثر هذه المعادلات شيوعاً هي معادلة لابلاس $\nabla^2 U = 0$ (28)

مسائل يؤول حلها لمعادلة لابلاس

أ ـ **المجال الحراري المستقر**: لقد وجدنا سابقاً أن المعادلة الناتجة عن دراسة مجالٍ حراريٍ مستقر (معادلة التوصيل الحراري) هي من الشكل :

$$U_t = a^2 . \nabla^2 U = 0 \qquad (29)$$

$$a^2 = \frac{k}{C\rho}$$

وعندما تكون العملية مستقرة (أي لا تعتمد على الزمن) فإن توزع الحرارة لا يتعلق بالزمن أي $U_t = 0$ ومنه نحصل على $\nabla^2 U = 0$ معادلة لابلاس، وإذا وجدت مصادر حرارة أخرى فإننا نحصل (بالاستقرار) على العلاقة : $\nabla^2 U = -f \quad , \quad f = \frac{F}{k}$ (30)

حيث F كثافة المصدر الحراري و k معامل التوصيل الحراري ونحصل على معادلة (30) تسمى معادلة بواسون.

ليكن المطلوب تعيين دالة $U(x,y,z)$ (درجة الحرارة) المحققة داخل حجم T المعادلة:

$$\nabla^2 U = -f(x,y,z)$$

بشروط حدية من أحد الأشكال التالية:

1. $U = f_1$ على السطح Σ المحيط بـT.

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = f_2$ على السطح السطح Σ.

3. $\frac{\partial u}{\partial t} + h(u - f_3) = 0$ على السطح Σ

حيث h, f_1, f_2, f_3 دوال معروفة ، و $\frac{\partial u}{\partial x}$ المشتقة الناظمية للدالة U على السطح Σ.

تطبيقات(2):

في الحالة الأولى نسمي المسألة مسألة ديرخليه وفي الحالة الثانية والثالثة فتسمى المسألة مسألة نيمان.

ب. كمون السائل : كمون التيار المستقر أو المجال الكهربائي المتوازن...الخ .

مثال :

ندرس مسألة التيار الجهدي للسائل دون مصادر خارجية:

بفرض T حجم محدود بسطح موجه Σ ويحوي تياراً مستقراً لسائل غير قابل للانضغاط كثافته ρ وسرعته $V(x,y,z)$ وإذا كان هذا التيار كموني (محافظ) فإن سرعته V تحقق.

$$V = - grad\ \varphi$$

حيث φ دالة سلمية تسمى كمون السرعة وعند انعدام المصادر أي كان الحقل V لولبياً

أي: $$div\ \ V = 0$$

فإن φ يكون توافقي (كمون السرعة).

ليكن لدينا تيار مستقر (محافظ) ذو كثافة حجمية $j(x,y,z)$ فإذا انعدمت المصادر الحجمية للتيار في الوسط فإن:

$$div\ \ j = 0$$

وإذا كان E هو المجال الكهربائي المحدد بوساط كثافة التيار وفق قانون أوم بالعلاقة : $E = \dfrac{j}{\lambda}$

حيث λ الناقلية في الوسط والعملية تتم بشروط الاستقرار ويكون ضمن هذه الشروط المجال E محافظاً أي: $E = -\ grad\ \varphi$

حيث يمكننا كتابة $j = -\lambda\ grad\ \varphi$

وبذلك نجد: $\nabla^2 \varphi = 0$

أي أن جهد التيار (كمون التيار) يحقق معادلة لابلاس.

يمكننا أيضاً دراسة المجال الكهربائي للشحنات المستقرة أي المحققة للمساواة : $rot\, E = 0$

ومنه حسب التحليل الشعاعي يمكننا أن نكتب أن:

$$E = -\ grad\ \varphi$$

حيث φ هو كمون الحقل.

ويفرض $\rho(x,y,z)$ الكثافة الحجمية للشحنات الموجودة في الوسط (بفرض أن عامل نفوذية الوسط يساوي $\varepsilon_0 = 1$) فنجد حسب القانون الرئيسي في الكهرباء الديناميكية.

$$\iint_S E_n ds = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T \rho dT$$

حيث T حجم ما وS سطح يحيط بالحجم T وأما $\sum ei$ فهي مجموع الشحنات داخل T وحسب قانون غوص . أوستراغرادسكي

$$\iint_S E_n ds = \iiint_T div E \, d\tau$$

فإننا نحصل على $div\, E = 4\,\pi\,\rho$

وإذا عوضنا عن $E = -\,grad\,\varphi$ نجد: $\nabla^2 \varphi = -\,4\,\pi\,\rho$

أي أن الكمون الكهربائي في هذه الحالة يحقق معادلة بواسون.

وعند انعدام الشحنات $(\rho = 0)$ فإن φ تحقق معادلة لابلاس.

بعض حلول معادلة لابلاس:

تشكل حلول معادلة لابلاس ذات التماثل الكروي أو الأسطواني المعتمد على متحول واحد أهمية خاصة.

إن حل معادلة لابلاس ذا الشكل ® $U = U$ (ذا التماثل الكروي) يتحدد من المعادلة التفاضلية.

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right) = 0$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل على: $U = \frac{c_1}{r} + C_2$

وباختيار مناسب للثوابت C_1, C_2 نحصل : $U = \frac{1}{r}$

والدالة هذه تسمى عادة الحل الأساسي لمعادلة لابلاس.

وعندما تكون الدالة معينة أسطوانياً ومتعلقة فقط بالمتحول ρ أي:

$$U = U(\rho)$$

فإن الحل يكون من الشكل : $U = C_1 \ln \rho + \rho_2$

وباختيار مناسب للثوابت نجد: $V_0 = \ln \frac{1}{\rho}$

وتسمى الدالة أيضاً بالحل الأساسي لمعادلة لابلاس في المستوي (بمتحولين مستقلين).

☜ ملاحظات:

إن الدالة $U = \frac{1}{r}$ معينة في كل الفراغ عدا في نقطة المبدأ فتصبح لا نهائية وبدقة مناسبة يمكن أن نركز الشحنة النقطية e في نقطة الأصل ونحصل على الكمون عندها: $U = \frac{e}{r}$

بنفس الطريقة يمكن أن تكون الدالة $V_0 = \ln \frac{1}{\rho}$ محققة لمعادلة لابلاس وبدقة مناسبة يمكن تحقق هذه الخاصة عندما $\rho = 0$ ويكون لدينا:

$$U = 2e_l \quad \ln \frac{1}{\rho}$$

حيث e_l كثافة الشحنة في واحدة الطول، و لهاتين الدالتين أهمية خاصة عند دراسة الدوال التوافقية.

طريقة تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية الجزئية

عند تطبيق تحويل لابلاس على التابع المجهول $U\ (x,t)$ نحصل على تابع جديد وسيطي لنرمز له بـ$U(x,S)$، وذلك بعد استبدال المتحول t بحدود التكامل في تحويل لابلاس، ولهذا فإن:

$$Lp\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}.dt$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty}e^{-st}U(x,t)\,dt$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}U(x,S)=\frac{dU(x,S)}{dx}$$

$$Lp\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=SU(x,S)-U(x,0)$$

$$Lp\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=S^2U(x,S)-SU(x,0)-\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)$$

$$\Rightarrow\ Lp\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right]=\frac{d^2U(x,S)}{dx^2}$$

هذا يعني أن المعادلة الناتجة هي معادلة تفاضلية عادية تابعها المجهول هو $U(x,S)$ من المفترض أننا نعلم حلها نطبق بعدها تحويل لابلاس العكسي على $U(x,\ S)$ فنحصل على الحل المطلوب $U\ (x,t)$.

سنوضح هذه الطريقة من خلال حل مسائل رياضية فيزيائية نموذجية.

أمثلة توضيحية:

لتكن الدالة $U(x,t)$ الممثلة لدرجة حرارة قضيب متجانس طوله يساوي الواحد محمول على محور السينات (ox).

إن المعادلة المحددة لهذه الحالة هي من الشكل: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{dx^2}$

لتكن لدينا الشروط الحدية والابتدائية التالية: درجة الحرارة الابتدائية ثابتة وهي: $U(x,o)=a$ في اللحظة $t=0$ تؤثر على القضيب عند نهايته درجة حرارة هي $U(1,0)=b$ وعند النهاية الأخرى تكون درجة الحرارة صفر أي :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

لنفترض أن $Lp[U(x,t)]=U(x,S)$

وبملاحظة أن: $Lp[U(1,t)]=U(1,S)$

$$=Lp[b]=\frac{b}{s}$$

$$Lp\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}\right]=\frac{dU(0,s)}{dx}=0$$

نطبق تحويل لابلاس فنجد: $SU(x,S)-a=\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$

$$\frac{d^2U}{dx^2}-SU=-a$$

وبحل المعادلة التفاضلية العادية: $U(x,S)=C_1\ ch\sqrt{S}x+C_2Sh\sqrt{S}x+\frac{a}{S}$

وحسب الشرط $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=0$ نجد : $C_2=0$

وحسب الشرط $Lp[U(1,t)]=\frac{b}{S}$

يكون لدينا : $\frac{b}{S}=C_1\ Ch\sqrt{s}x+\frac{a}{S}$

أي: $C_1=\frac{b+a}{Sch\sqrt{S}}$

نعوض في عبارة $U(x,\ S)$: $U(x,S)=\frac{a}{S}+\frac{(b-a)}{Sch\sqrt{S}}ch\sqrt{S}x$

ويأخذ التحويل المعاكس: $U(x,t)=a+(b-a)\ Lp^{-1}\left[\frac{ch\sqrt{S}x}{Sch\sqrt{S}}\right]$

ومنه يكون : (31) $U(x,t)=a+(b-a)\sum_{i=1}^{k}e^{st}\ \frac{Ch\sqrt{S}x}{Sch\sqrt{S}}$

وبحساب رواسب التابع $e^{st}\ \frac{Ch\sqrt{S}x}{Sch\sqrt{S}}$ نجد أن الأقطاب هي:

$$S=0\ ,\quad S=S_n=-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\qquad (n=1,2,.)$$

وبهذا نجد: $\operatorname{Res}\left[e^{st}\frac{ch\sqrt{S}x}{Sch\sqrt{S}},0\right]=1$

$$\operatorname{Res}\left[e^{st}\frac{Ch\sqrt{S}x}{S\,ch\sqrt{S}},S_n\right]=\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t}.\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x \qquad (32)$$

نعوض (32) في العلاقة (31) :

$$U(x,t)=a+\frac{4(b-a)}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t}Cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x$$

وهو الحل الموافق للمعادلة التفاضلية المعطاة .

المعادلات التفاضلية الجزئية بأكثر من متحول

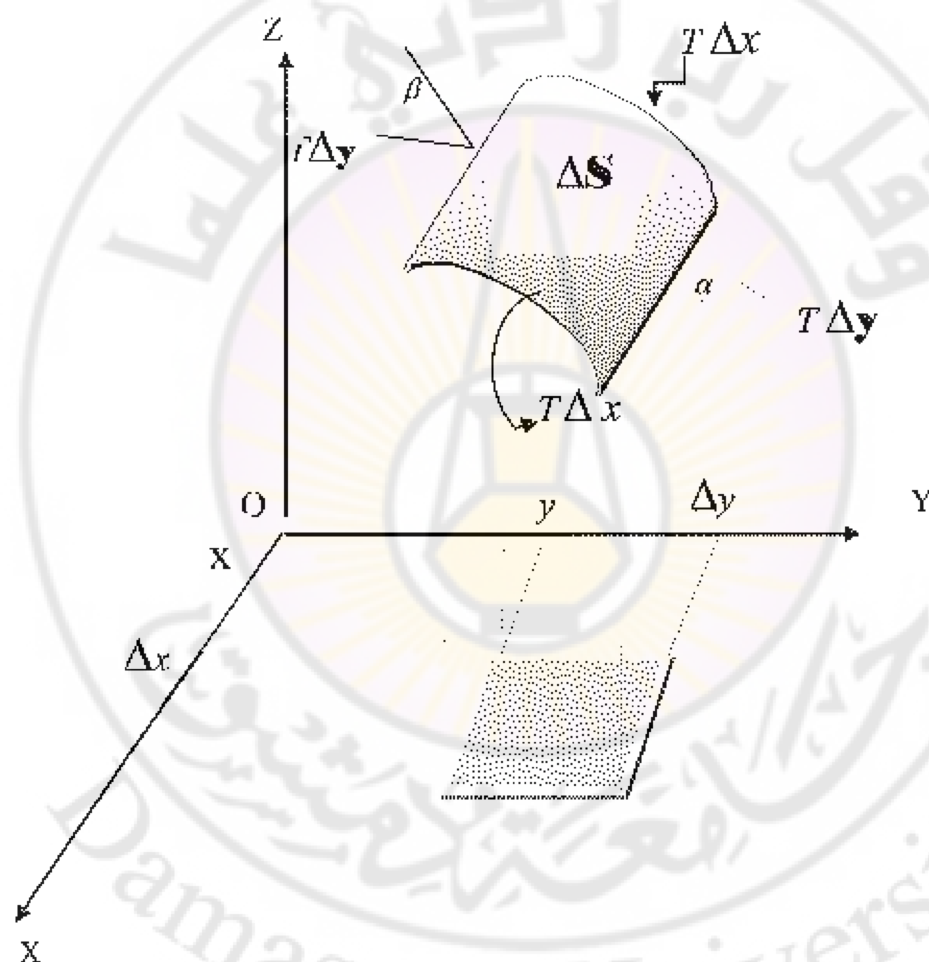
لندرس مسألة اهتزاز غشاء مرن أو ما يسمى بالمعادلة الموجية ذات البعدين.لنفرض أن الغشاء المرن موجود في سطح مستو Oxy ويفرض $\Delta s \approx \Delta x\ \ \Delta y$ عنصر تغير المساحة

يلاحظ أن القوى المؤثرة على القطع $\Delta y, \Delta x$ هي $T.\Delta x$, $T.\Delta y$ على الترتيب حيث T يمثل قوى التوتر في واحدة الأطوال وبتقريب مقبول فإن زوايا الانحناء تكون صغيرة بشكلٍ كافٍ لنستبدل جيوب تمامها بالواحد وتكون المركبات الأفقية لهذه القوى متساوية ومتعاكسة مباشرة أي أن الحركة الأفقية معدومة ضمن تقريب مقبول، وأما المركبات الشاقولية فهي: $T.\Delta y\ \ Sin\,\beta$, $-\ T\Delta y\,Sin\,\alpha$

والمحصلة تكون: $T\Delta y(Sin\beta - Sin\alpha)\approx T.\Delta y(tg\beta - tg\alpha)$

$$= T\,\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right]$$

حيث $y + \Delta y > y_1 \quad , \quad y_2 > y$



وتكون محصلة القوى المؤثرة شاقولياً على الطرفين الآخرين هي:

$$T.\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\Delta y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right]$$

حيث $x + \Delta x > x_1$ ، $x_2 > x$ إن القوى المحصلة الشاقولية على الكتلة $\rho\Delta x\ \Delta y$ حسب قانون نيوتن تساوي:

$$\rho\Delta x\Delta y\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T.\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1)-\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right]$$

$$+T.\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\mathrm{X}y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right]$$

وبالانتقال إلى النهايات $\Delta x \to 0$ ، $y \to 0$ نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

وهي المعادلة الموجبة لاهتزاز غشاء مرن ذي بعدين.

تطبيقات(3):

استخدام الإحداثيات المختلفة في المعادلات التفاضلية الجزئية.

إن استخدام أنظمة الإحداثيات المختلفة تسهل في بعض الأحيان حل المسائل فمثلاً إذا كان الغشاء المهتز دائرياً عندها يسهل استخدام الإحداثيات القطبية التي نستخدم فيها التحويل التالي :

$$x = r\,Cos\,\theta \quad , \quad y = r\,Sin\,\theta$$

فإذا فرضنا أن معادلة محيط الغشاء هي: $r = a$

حيث a ثابت، وكان المطلوب حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

فإن استخدام الشكل القطبي لهذه المعادلة وهو :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \qquad (33)$$

يسهل عملية الحل، وسنرى ذلك من أجل مسألة الغشاء الدائري ذو نصف القطر R.

إذا لاحظنا أن الحلول متناظرة قطرياً أي لا تتعلق بالإحداثي θ فإن المعادلة التفاضلية (33) تعود على الشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\ \nabla^2 u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

لأن $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ وعندما يكون الغشاء ثابتاً على محيط أي $r = R$ فإن

الشرط الحدي يصبح: $U(R, t) = 0$

وبفرض أن $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(r)$

فإننا نستطيع حل المعادلة الأخيرة بطريقة فصل المتحولات كما يلي:

لنفرض أن شكل الحل هو:

$$U(r,t) = V(r) \,.\, g(t)$$

نشتق ونعوض في المعادلة الأخيرة فنجد:

$$V(r).\frac{d^2 g}{dt^2} = a^2\left[g(t)\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right]$$

نقسم على $a^2 Vv \,.\, g$ فنجد:

$$\frac{1}{a^2 g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{V(r)}\left(\frac{d^2 V(r)}{dr^2} + \frac{dV(r)}{dr}\right)$$

نلاحظ أن الطرف الأول يتبع t والثاني r وهما متساويان أي كل منهما ثابت لهذا نجد:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a^2 g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -k^2 \\ &\frac{1}{V(r)}\left[\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right] = -k \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

بإصلاح المعادلتين (34) فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{d^2g}{dt^2} + k^2\, a^2 g(t) = 0 \\ & \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + k^2\, V(r) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

لنغير المتحول كما يلي: $V = k\,r$

فنجد:
$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dV}{dr} = k\,\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(k\frac{dV}{dr}\right)$$

$$= k\,\frac{d^2V}{dr^2}\cdot\frac{dV}{dr} \qquad = k^2\,\frac{d^2V}{dr^2}$$

نعوض ونصلح فنجد: $\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + V(r) = 0$

وهذه المعادلة كما نعلم تقبل الحل من النوع:

$$V(r) = C_1 J_0(\gamma) + C_2 Y_0(\gamma)$$

حيث $Y_0(r), J_0(r)$ تابعاً بيسيل من النوعين الأول والثاني من المرتبة صفر، وبما أن الغشاء محدود فإن $Y_0(r) \to \infty$ عندما $r \to 0$ ولهذا يلزم أن يكون $C_2 = 0$ وإذا أخذنا $C_1 = 1$ نجد:

$$V(r) = J_0\,(r) = J_0\,(kr)$$

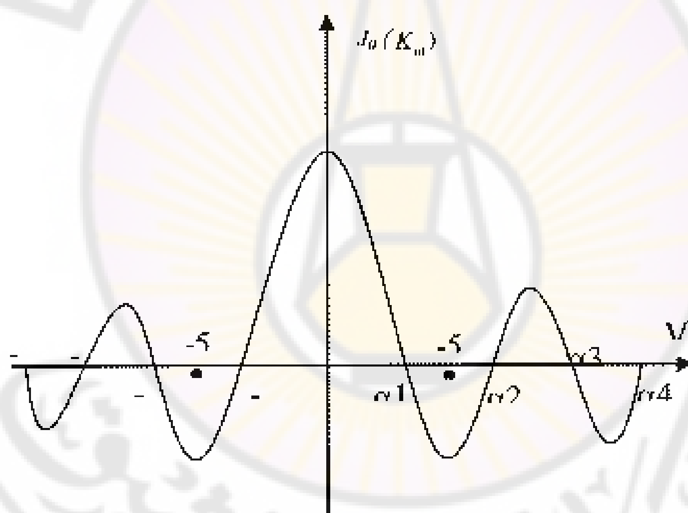
أي الحل: $U(r,t)=g(t)\,J_0\,(kr)$

وحسب الشرط $U(R,t)=0$ نجد

$$U(R,t) = g\,(t)\;\; J_0\,(KR) = 0$$

يمكن تعيين $K = K_m = \frac{\alpha_m}{R}$ حيث α_m الأصفار الموجبة لـ$J_0(r)$.

أي: $V_m(r) = J_0(K_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}\right)$



معادلة لابلاس بالأبعاد الثلاث (نظرية الكمون)

من أهم المعادلات التفاضلية الجزئية معادلة لابلاس أي المعادلة:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ولقد أطلق الرياضيون اسم نظرية الكمون أو نظرية الجهد على حل هذه المعادلة ودعيت الدوال المحققة لها بالدوال التوافقية والتي تتميز بأن مشتقاتها الثانية مستمرة. لقد حلت هذه المسألة رياضياً بواسطة التحليل المركب وتابع بمتحولين وسوف نذكر بعض حلولها في التطبيقات الهندسية في أبحاث الجاذبية يعطى قانون نيوتن قوى الجاذبية بين كتلتين μ , m والبعد بينهما r كتابع $\vec{F}$ تدرجه هو التابع: $U = g.\frac{m.\mu}{r}$ حيث g التسارع الأرضي وr يعطى كما يلي:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

r بعد الكتلة الأولى عن الثانية ، ويسمى التابع $U(x,y,z)$ بكمون حقل الجاذبية وهو تحقق معادلة لابلاس أي: $\nabla^2 U = 0$ حيث $U = \frac{1}{r}$

وعند دراسة الشحن الكهربائية ذات الكثافة $\rho \ (x,y,z)$ الموزعة على منطقة R في الفراغ فإن الكمون يعطى: $U(x,y,z) = K\iiint\limits_R \rho dxdydz$ حيث $k > 0$

والتابع $U = \frac{1}{r}$ حل لمعادلة لابلاس أي الكمون الكهربائي السابق حل لمعادلة لابلاس. $\nabla^2 u = K\iiint\limits_R \rho \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dxdydz$

وفي الكهرباء الساكنة تكون القوى المؤثرة هي قوى كولون المماثلة لقوى نيوتن وهذا يدل على أن كمون الحقل الناتج هو أيضاً حل لمعادلة لابلاس وهو توافقي أيضاً، كذلك الأمر في مسألة انتشار الحرارة المعادلة الأساسية من الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \nabla^2 U$$

وعندما تكون الحرارة غير متقلبة بالزمن نحصل أيضاً على معادلة لابلاس، وفي التطبيقات الهندسية نحتاج لحل معادلة لابلاس على سطوح معينة محددة وضمن شروط حدية وابتدائية معينة ولهذا نستخدم نظام الإحداثيات المناسب لشروط المسألة فإذا كان التناظر مركزياً نفضل الإحداثيات الكروية وإذا كان التناظر محورياً نفضل الإحداثيات الأسطوانية وهكذا.ولقد رأينا معادلة بيسيل في الإحداثيات القطبية ويمكن الحصول على معادلة ليجاندر في الإحداثيات الكروية.

مسائل محلولة

مثال(1):

أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0<x<l \quad , \quad t>0$$

حيث :

$$U(0,t) = 0 \quad , \ t > 0$$

$$U(l, t) = 0 \quad , t > 0$$

$$U(x,0) = 0 \qquad 0 \le x < l$$

الحل : المعادلة المعطاة تفاضلية من النمط الزائدي .

وهي تمثل معادلة انتشار الحرارة على قضيب متجانس طوله l ضمن شروط تحقق الانتشار الحراري المتساوي على سطح القضيب.

لنحل المعادلة بطريقة فصل المتحولات أي لنفرض أن الحل من الشكل:

$$U\ (x,t)=X(t).T(t)$$

نبدل في المعادلة المفروضة فنجد: $\frac{X``}{X}=\frac{T`}{KT}=-\alpha^2$

وهذا يعطي: $\alpha^2 X = 0 + X``$

$$T` + \alpha^2 K T = 0$$

ومن الشروط الابتدائية والحدية نجد:

$$U(0,t) = X(0)\ .\ T(t) = 0$$

$$U(l,t) = X(l)\ .\ T(t) = 0$$

وهذا يعطي: $X(0) = 0\ ,\ \ X(l) = 0$

مع المعادلة: $\alpha^2 X(x) = 0 + X``(x)$

وحلها كما نعلم: $\alpha x + B\ Sin\ \alpha x\ X(x) = A\ \ Cos$

وحسب الشروط نجد أن الثابت $A = 0$ وحسب الشرط الحدي الآخر نجد:

$$X(l) = B\ Sin\ \ \alpha\, l = 0$$

ومنه $Sin\alpha\, l = Sin\ n\ \pi = 0$

أي أن الحل هو: $X_n(x) = B_n Sin\dfrac{n\pi}{l}$

وأما المعادلة الأخرى $\alpha^2 K\,T = 0 + T`$

فحلها كما نعلم هو حل أسي من الشكل: $T(t) = C\ e^{-a^2.k.t}$

أي $T_n(t) = .e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Kt}$

ويكون الحل: $U_n(x,t) = X_n(x)\ .\ T_n(t)$

$$\text{Un}(x,t) = a_n.e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin\frac{n\pi}{l}\cdot x\quad ,\quad n = 1,2,3,.$$

حيث $a_n = B_n C_n$

ويكون الحل: $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin \frac{n\pi}{l} x$

وحسب الشروط الابتدائية نجد: $U(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; Sin \frac{n\pi}{l} x$

والثابت a_n يتعيين من نشر فورييه الفردي كما يلي:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x Sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx = \frac{2l(-1)^n}{n\pi}$$

أي الحل المطلوب هو:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l x Sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx \right] e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n\pi} . e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin \frac{n\pi}{l} x$$

مثال (2):

حل للمعادلة التفاضلية الجزئية: $\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x}$ $\quad , t > 0 \quad 0 \le x < l \quad ;$

$$U(0,t) = 0 \;,\; U(l,t) = U_1 = cte$$

$$U(l,0) = x \qquad 0 < x < l$$

الحل : المعادلة المعطاة تفاضلية جزئية من النمط المكافئ ، لنفرض:

$$U(x,t) = W(x,t) + \frac{U_1}{l}x$$

نبدل في المعادلة المفروضة فنجد:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad ; \qquad 0 < x < l\ ,\ t > 0$$

$$W(0,t) = 0\ ,\ W(l,t) = 0$$

$$W(x,0) = x - \frac{U_1}{l}x \qquad 0 < x < l$$

وذلك اعتماداً على المثال (1)

ويكون الحل كما مر معنا في المثال السابق

$$U(x,t) = \sum_1^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\left(x - \frac{u_0}{l}x\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.\right].e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin\frac{n\pi}{l}x + \frac{U_1}{l}x$$

مثال (3): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\nabla^2 U(x,y) = 0 \qquad 0 < x < a \quad , \qquad 0 < y < b$$

ضمن الشروط الحدية : $0 \leq x \leq a$ $U(x,0) = x$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,y) = 0$$

$$U(x,b) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(a,y) = 0$$

الحل : المعادلة المعطاة تفاضلية جزئية من النمط **الناقصي** .

وهي تمثل انتشار حرارة على مستطيل رقيق إبعاده a, b معزول من الطرفين ، حيث إن طرفه الأول درجة حرارته صفر والثاني محدد بدالة $f(x) = x$.

ليكن شكل الحل هو: $U\ (x, y) = X(x).Y(y) \quad (36)$

نبدل (36) في المعادلة المفروضة فنجد:

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$Y'' + \lambda = 0$$

ومن الشروط الحدية $x = 0$ ، $x = a$ نجد:

$$\lambda = -\alpha^2 \qquad \alpha > 0$$

ومن أجل حل غير تافه. $\alpha^2 X = 0 + X''$

$$X'(0) = X'(a) = 0$$

ويكون الحل: $\alpha x + B\ Sin\ \alpha x\ X(x) = A\ Cos$

ومن الشروط الحدية نجد أن: $B = 0$ و $\alpha = \frac{n\pi}{a}$ $\quad n = 0, 1, 2 \ldots$

ومنه $X_n(x) = A_n Cos \frac{n\pi}{a} x \quad (37)$

أما حل معادلة Y فيكون من الشكل:

$$Y(y) = C \; ch \; \alpha y + D \; Sh \; \alpha y$$

وهي تكتب كما يلي:

$$Y(y) = E \, Sh \, (y + F) \qquad (38)$$

حيث: $F = th^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) \Big/ \alpha \quad E = \sqrt{D^2 - C^2}$

ومن الشروط الحدية $Y(b) = 0$ نجد:

$$Y(b) = E \, Sh \; \alpha \, (b + F) = 0$$

وهذا يؤدي $F = -b$

نعوض (37) و (38) في العلاقة (36) فنحصل على الحل:

$$U(x,y) = \frac{(b-y)}{b} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi}{a} x \, Sh \frac{n\pi}{a} (y - b)$$

انتهى بحمد الله .

المصطلحات العلمية

Negative orientation	اتجاه سالب
Positive orientation	اتجاه موجب
Weierstrass M-test	اختبار فيرشتراس
Comparison test	اختبار المقارنة
Ratio test	اختبار النسبة
Independence of path	استقلال عن المسار
Stereographic projection	اسقاط جغرافي
Analytic continuation	استمرار تحليلي
Anti-derivative	أصل المشتقة
Arg z	السمة الزاوية للعدد
Principal branch	الفرع الرئيسي
Principal value	القيمة الرئيسية
Imaginary axis	المحور التخيلي
Real axis	المحور الحقيقي
Extended Complex plane	المستوي المركب المغلق
Residue	باقي
Partition	تجزئة
Transformation	تحويل

المصطلحات العلمية

Translation transformation
Magnification transformati
Linear transformation
Rotational transformation
Schwartz-Christoffel transf
Bilinear transformation
gradient
Heat flow
Fluid flow
Mapping
Convergence
Absolute convergence
Uniform convergence
Pointwise convergence
Integral
Line Integral
Trigonometric Integral
Improper Integral
Zero of a function
Rool of a complex number
Zero of order m
Potential
Electrostatic potential
Neighbor hood
Cauchy product
boundary of a set
Electric field
Vector Field
Irrotational vector field

تحويل خطي
تحويل دوراني
تحويل شوارتز ـ كريستو
تحويل مزدوج الخطية
تدريج
تدفق حراري
تدفق سائل
تطبيق (دالة)
تقارب
تقارب مطلق
تقارب منتظم
تقارب موضعي
تكامل
تكامل المسار
تكامل مثلثي
تكامل معتل
جذر دالة
جذر عدد مركب
جذر من الدرجة m
جهد (طاقة)
جهد كهربائي
جوار
حاصل ضرب كوشي
حدود مجموعة
حقل كهربائي
حقل متجه
حقل متجه غير دوراني

المصطلحات العلمية

Conservative vector field	حقل متجه محافظ
loop	حلقة
Polygonal line	خط مضلع
Stream lines	خطوط التيار
Force lines	خطوط القوة
Local Properties	خواص موضعية
Circle of convergence	دائرة التقارب
Function	دالة
Stream function	دالة التيار
Sine function	دالة الجيب
Exponential function	دالة أسية
Analytic function	دالة تحليلية
Harmonic Function	دالة توافقية
Cosine function	دالة جيبتمام
Periodic function	دالة دورية
Inverse function	دالة عكسية
Entire function	دالة كلية
Multiple-valued function	دالة متعددة القيمة
Trigonometric function	دالة مثلثية
Conformal function	دالة مطابقة (مشاكلة)
Rational Function	دالة نسبية
one to one function	دالة واحد ـ لواحد
velocity potential	سرعة الجهد
Argument	سعة زاوية
Chauchy criterion	شرط كوشي
polar form	شكل قطبي
Image	صورة
De Moivre's formula	صيغة ديموافر
Cauchy Integral formula	صيغة كوشي للتكامل

المصطلحات العلمية

Generalized Cauchy Integral formula	صيغة كوشي للتكامل العامة
Length of a Contour	طول كانتور
Pure Imaginary number	عدد تخيلي خالص
Real Number	عدد حقيقي
Complex Number	عدد مركب
branch	فرع
branch cut	فصل الفرع
chain rule	قانون السلسلة
Maximum Modulus Principle	قانون القيمة العظمى
L'Hopital rule	قانون لوبيتال
disc	قرص
closed disc.	قرص مغلق
open disc	قرص مفتوح
pole	قطب
simple pole	قطب بسيط
complex power	قوة مركبة
power	قوى
Cauchy Principal value	قيمة كوشي الرئيسة
Absolute value	قيمة مطلقة
contour	كانتور (مسار)
closed contour	كانتور مغلق
simple closed contour	كانتور مغلق وبسيط
open contour	كانتور مفتوح
positively oriented contour	كانتور موجب الاتجاه
polynomial	كثيرة حدود
infinity	لا نهاية (الرمز ∞)
Logarithm	لوغاريتم
Triangular Inequality	متباينة المثلث
Sequence	متتالية

Convergent sequence	متتالية تقاربية
Cauchy sequence	متتالية كوشي
vector	متجه
Equipotential	متساوية الجهد
Isothermal	متساوية الحرارة
Series	متسلسلة
Power series	متسلسلة القوى
Taylor series	متسلسلة تايلور
divergent series	متسلسلة تباعدية
Convergent series	متسلسلة تقاربية
Cauchy series	متسلسلة كوشي
Laurent Series	متسلسلة لورانت
Maclaurin Series	متسلسلة ماكلورين
geometric series	متسلسلة هندسية
Connected	مترابط
Continuous	متصل
Domain	مجال
Domain of definition	مجال تعريف الدالة
Simply connected domain	مجال مترابط ترابطاً بسيطاً
Multiply connected domain	مجال متعدد الترابط
partial sum	مجموع جزئي
sum of a series	مجموع متسلسلة
unbounded set	مجموعة غير محددة
Bounded set	مجموعة محدودة
closed set	مجموعة مغلقة
open set	مجموعة مفتوحة
Range of function	مدى الدالة
Conjugate	مرافق
Harmonic Conjugate	مرافق توافقي
Complex conjugate	مرافق مركب
Derivative	مشتقة
Laplace Equation	معادلة لابلاس

المراجع العلمية

المراجع باللغة العربية و الانكليزية

1. Boas; Invitation to Complex Analysis, Random House 1987.
2. Churchill R., Brown J.W.; Complex variable and Applications, 4th. Ed. Mc Graw-Hill Inc. Book comp. 1984 London.
3. Fisher, S.D.; Complex Variables, Wadsworth Inc. 1986, Calif. Belmont.
4. Lang, S.; Complex Analysis, Addison-Wesley pub. comp. Inc. 1977, London.
5. Mathews, J.H.; Basic Complex Variables for Mathematics and Engineering, Allyn and Bacon, 1982, Boston.
6. Rudin, W; Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill comp. 3rd Ed. 1986 N.Y.
7. **Dennis G. Zill , Patrick D. Shanahan. /A first course in complex analysis with applications /. Includes indexes . ISBN 0-7637-1437-2, 2003.**
8. د. محمود كنكت ، مبادئ التحليل المركب ، دار ومكتبة الهلال ، بيروت 2003 .
9. د. عازار معروف الشايب ، رياضيات /4/، منشورات جامعة دمشق 2010 .

اللجنة العلمية:

- الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب
- الأستاذ المساعد الدكتور نظير هلال
- الأستاذ المساعد الدكتور عماد فتاش

المدقق اللغوي :

- الأستاذ الدكتورة سكينة موعد


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University